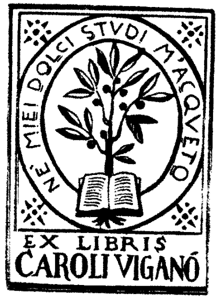

ANTONII MARII LORGNA

DE

CASU IRREDUCTIBILI

TERTII GRADUS

ET

SERIEBUS INFINITIS

EXERCITATIO ANALYTICA

. . . . *Juvat integros accedere fontes*
Atque haurire : juvatque novos decerpere flores.

Lucrez. Lib. 4.

VERONÆ MDCCLXXVI.

TYPIS MARCI MORONI

Superiorum Permissu.

PROOEMIUM.

NEminem latet, in Æquationum Cubicarum reſolutione, methodo vulgo *Cardanica* nuncupata, valores radicum realium imaginariis implicitos erui, eoſdemque nullo artificio ad formam finitam realem ad hanc uſque diem redigi potuiſſe. *C' eſt a quoi on travaille inutilement depuis deux* *cents ans* (*Alembert* Enciclop. Cas irreductible) . Hujusmodi veluti quædam in ipso Scientiæ limine lacuna omnes, quotcunque Algebram coluere, jam inde a *Cardani* temporibus sollicitos habuit. Et primo, qua id de causa fieret, inquirere diligentius cæperunt. In quo quidem diversi diversa afferunt, nec in unum omnes, circa mysterii enodationem, Mathematici conveniunt. Id tamen confectum, ratumque passim videtur, obscuram potius formam Cardanicam dicendam esse, quam fallacem, eamque reale quidpiam exprimere, etiamsi imaginariis signis involvatur . Cum enim Æquationis radix reapse sit realis, atque ejus sit Cardanica Radicis expressio formæ, quæ evoluta rectificari, imaginariisque exui posse videatur, cur existimandum haud erit eandem revera finitum aliquod reale significare, imaginariis, virtualiter saltem, contrarietate signorum elisis ? Nihil aliqui præter hujusmodi suspicionem in medium adduxere. Alii vero longius progressi, ejus rei demonstrationes, non easdem tamen omnes, condere & proferre conati sunt. Profecto vix quemquam a *Cardano* fuisse, facile credam, qui cum in hujusmodi Studiorum genere aliquanto processerit, tam parum sibi confidendum existimarit, ut vires quodammodo novas in re nondum desperata, se irrito conatu exerciturum, arbitratus sit. Id mihi quoque accidisse, meditatio hæc ipsa monet qualiscunque. Occasione enim disquisitionis cujusdam perillustri Instituto Scient. Bononiensi deferendæ, circa Æquationes tertii gradus versanti in animum venit, ut, alendæ industriæ gratia, Casum quoque irreductibilem aggrederer, mihi saltem, sin publico, difficultate penitius introspecta, satisfacturus. Cum vero recordarer tot summos tum præteriti cum ævi nostri Mathematicos, irresolutum id omnes reliquisse, propius nihil est factum, quam ut a suscepto consilio revocarer. Res tamen sæpe rem trudit, difficultate ipsa aliquando stimulos admovente. Quo quidem factum, ut, quæstione undequaque adorta, eadem ipsa via, qua ad reductionem, si haberi posset, Formulæ Cardanicæ ad formam finitam imaginariis immunem intendebam, eo paulatim devenerim, ut, Binomium Cardanicum valoris profecto esse necessario realis, formæ autem necessario imaginariæ, demonstrarem, intima Serierum Theoria facem quodammodo præferente. Oblata proinde necessitate, potius quam occasione, gravissimas difficultates enucleandi, quæ in Seriebus præsertim divergentibus occurrunt, in eo totus fui, ut ipsam Serierum infinitarum genesim penitius scrutarer, evolveremque; In quo fortasse haud omnem mihi perditam fuisse ope-

operam cognoſcent, qui hiſce perlegendis paullulum immorari non inutile exiſtimabunt. Cæterum quidquid ſit, quod Exercitatione hac noſtra in re difficillima præſtare pro viribus datum fuit, Geometris, ut par eſt, dijudicandum relinquimus.

SECTIO I.

DEFINITIO

§. I.

ÆQuatio (A) tertii gradus

$$x^3 - px + q = 0 \text{ - - - - - - - - } (A)$$

ſecundo termino deſtituta, quæ poſitis p, q quantitatibus rationalibus, nullo cujuſcunque formæ diviſore ad inferiorem gradum deprimi poteſt, Cubica Æquatio nuncupatur.

COROLL.

§. II.

Æquatio ideo tertii gradus in genere, quæ cujusvis formæ Diviſore ad inferiorem gradum deprimi poteſt, etiamſi radicibus ſit prædita realibus, inæqualibus, atque incommenſurabilibus, Æquatio Cubica proprie dici nequit.

PROP. I.

§. III.

Radices Cubicæ Æquationis (A)

$$x^3 - px - q = o \ldots\ldots\ (A)$$

ad methodum *Cardani* definire.

RESOLUTIO.

Fiat $x = y + \frac{p}{3y}$. Erit $x^3 = y^3 + py + \frac{p^3}{3y} + \frac{p^3}{27y^3}$, ideoque facta in (A) valorum x in y substitutione, prodibit $y^6 - qy + \frac{p^3}{27} = o \ldots\ldots (B)$ Resoluta Æquatione (B), habetur

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

Hinc $x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + p :$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

Quare, secundi termini Binomii numeratore, & denominatore in $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$ ductis, exurget Radicis Æquationis (A) Cardanica expressio, quam omnium primus invenit *Scipio Ferri*,

$x =$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \ldots\ldots (C)\ \text{Q. E. I.}$$

SCHOLION.

§. IV.

Quotiescunque in Cubica Æquatione (A), collatis inter se invicem valoribus p, q, est $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{4}$, neminem latet, Æquationem radicibus tum inæqualibus cum realibus præditam esse; quod dudum demonstratum est. Verum in Æquatione (C) §. III. quotiescunque est $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{4}$, valorem x in p & q imaginariis implicari, manifestum est. Qua de causa fiat, quove *methodi*, si quod inest, vitio, ut quod reapse reale esse debet, sub forma appareat imaginaria, diligentius primo investigemus.

PROP. II.

§. V.

In Æquatione tertii gradus secundo termino destituta, cujus omnes Radices sint reales, atque inæquales, Triens quadrupli coefficientis tertii ter-

b mini

mini poſitive ſumti majus eſt quadrato cujuslibet radicis Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Sint Æquationis radices a, $-b$, $-c$, vel $-a$, b, c; & quoniam deficit terminus ſecundus, erit $a = b + c$, atque Æquatio hujus erit formæ $x^3 - (b^2 + bc + c^2)x \pm bc(b+c) = 0$; dico, quantitatem $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3}$ majorem eſſe quadrato cujuslibet radicis b^2, vel c^2, vel $b^2 + 2bc + c^2$. Etenim, quod ad quadrata b^2 vel c^2 attinet, res eſt per ſe manifeſta. Quod vero ad alterius radicis quadratum, cum ſumma quadratorum duarum quantitatum major ſit duplo earundem producto, erit $b^2 + c^2 > 2bc$. Quare $b^2 + 4bc + c^2 > 6bc$; ideoque $4b^2 + 4bc + 4c^2 > 3b^2 + 6bc + 3c^2$. Ergo $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3} > b^2 + 2bc + c^2$, quadrato ſcilicet radicis $\mp b \mp c$. Q. E. D.

PROP. III.

§. VI.

In Æquatione tertii gradus ſecundo termino deſtituta, cujus omnes radices ſint reales, atque inſuper duæ inter ſe æquentur, Triens quadrupli

coef-

coefficientis tertii termini poſitive ſumti æquale eſt quadrato radicis maximæ Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Poſitis, quæ in præced. Prop., fiat $c = b$. Erit radix maxima $= \pm 2b$; utraque vero æqualium radicum $= \mp b$, atque ideo $\frac{4b^2 + 4bc + 4c^2}{3} = 4b^2$, quadrato ſcilicet radicis maximæ $\pm 2b$. Q. E. D.

PROP. IV.

§. VII.

In Æquatione tertii gradus ſecundo termino deſtituta, cujus binæ radices ſint impoſſibiles, exiſtente tertio termino negativo, Triens quadrupli coefficientis ejuſdem termini tertii poſitive ſumti, minus eſt quadrato radicis realis Æquationis.

DEMONSTRATIO.

Eſto hujuſmodi Æquatio $x^3 + (a^2 - 3b^2)x - 2a^2b - 2b^3 = 0$ cujus binæ radices ſunt imaginariæ, realis vero radix $x = 2b$. Et quoniam tertius terminus negativo ſigno affici debet, erit $3b^2 > a^2$. Quare Triens quadrupli coefficientis termini tertii poſitive ſumti erit $\frac{12b^2 - 4a^2}{3}$. Jam vero $\frac{12b^2 - 4a^2}{3}$

minus

minus est quam $12b^2$; & proinde $\frac{12b^2 - 4a^2}{3} < 4b^2$, quadrato scilicet radicis realis Æquationis. Ergo &c. Q. E. D.

COROLL. I.

§. VIII.

Hinc in Æquatione tertii gradus in genere $x^3 - px \mp q = o$ cujus omnes radices sunt reales, atque inæquales, nulla esse potest radix major quam $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, neque ipsi æqualis.

COROLL. II.

§. IX.

Si autem, radicibus positis realibus, binæ fuerint inter se æquales, erit radix maxima $= \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}$, prout fuerit q negativa quantitas vel affirmativa.

COROLL. III.

§. X.

Quod si radices binæ ponantur impossibiles, radix realis major est quam $2\sqrt{\frac{p}{3}}$:

PROP.

PROP. V.

§. XI.

In Æquatione

$$x = y + \frac{p}{3y}$$

quotiescunque est $x < 2\sqrt{\frac{p}{3}}$, hoc est $x^2 < 4p:3$, valor ipsius y est impossibilis.

DEMONSTRATIO.

Resolvatur enim æquatio, ut prodeat valor y in x. Exurget

$$y = \frac{x \pm \sqrt{\left(x^2 - \frac{4p}{3}\right)}}{2}$$

in qua si fuerit $x^2 < \frac{4p}{3}$, manifestum est fore y quantitatem imaginariam: ergo &c. Q. E. D.

COROLL.

§. XII.

Si igitur fuerit $\frac{x^2}{4}$ æquale vel majus quam $\frac{p}{3}$, valores ipsius y erunt reales.

PROP.

PROP. VI.

§. XII.

Positis binis æquationibus

$$x^3 - px - q = o \dots\dots\dots (A)$$

$$x - y - \frac{p}{3y} = o \dots\dots\dots (B)$$

I. Si æquationis (A) fuerint radices omnes tum reales, cum inæquales, atque in æquatione (B) loco x substituatur radix quælibet æquationis (A), evadit y imaginaria.

II. Si autem in æquatione (A), cujus sunt radices reales, fuerint binæ inter se æquales, & in æquatione (B) loco x ponatur radix maxima æquationis (A), valores y erunt reales.

III. Pari modo si in æquatione (A) fuerint binæ radices imaginariæ, & realis radix ejusdem æquationis substituatur loco x in æquatione (B), valores y erunt itidem reales.

DEMONSTRATIO.

Nam, quod ad I. Prop. partem, quælibet radix x æquationis (A) minor est quam $2\sqrt{p:3}$ (§. VIII.). Valores autem speciei y in æquatione (B) sunt impossibiles, quotiescunque est x minor quam $2\sqrt{p:3}$ (§. IX.). Ergo &c.

Quod

Quod vero ad II. & III., radix maxima x æquationis (A), in qua sunt radices omnes reales, atque binæ inter se æquales, æquatur $2\sqrt{p:3}$ (§. IX.); vel existentibus in eadem æquatione binis radicibus imaginariis, radix realis major est quam $2\sqrt{p:3}$ (§. X.). Valores autem y sunt in æquatione (B) reales, si fuerit x æqualis $2\sqrt{p:3}$, vel eodem majus (§. XII.). Ergo &c. Q.E.D.

SCHOLION.

§. XIV.

Quod si fuerit æquatio $x^3 + px \mp q = o$, cujus binæ radices sunt impossibiles, atque sumatur $x = y - p:3y$, posita in hac æquatione, loco x, radice reali æquationis tertii gradus, valores y erunt reales. Resoluta enim, ut ante, æquatione $x = y - p:3y$, fit $y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{p}{3}\right)}$, in qua, existente p quantitate affirmativa, ex hypothesi, species y nusquam imaginaria evadere potest.

CO-

COROLL.

§. XV.

Colligitur hinc manifesto Binomium Cardanicum

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

necessario imaginariis valoribus implicari, quotiescunque æquatio resolvenda radicibus sit prædita tum realibus cum inæqualibus. Nam eo prorsus redit Cardani regula, ut proposita æquatione (A) (§. XIII.)

$$x^3-px-q=o\ldots\ldots\text{(A)}$$
$$x-y-p:3y=o\ldots\ldots\text{(B)}$$

fingatur æquatio (B), quo valores y, & proinde ipsius x in p & q commode eruantur. Quod perinde est ac si radices æquationis (A), loco x, substituerentur in æquatione (B. Radicibus vero æquationis (A) positis tum realibus cum inæqualibus, si una quælibet earum loco x substituatur in æquatione (B), fit y imaginaria (§. XIII). Ergo & qui ex Cardanica substitutione prodeunt valores in p & q ipsius y erunt imaginarii. Si igitur in æquatione (B) ejusmodi ponantur valores y, valorem itidem in p, & q ipsius x imaginariis implicari, necesse est. Quo quidem perspicue licet intelligere, cur eo ipso quod in æquatione

tione (A) omnes radices x sint reales, & inæquales, valor ejusdem x in æquatione (B) sub forma appareat imaginaria. Cum enim valor y in (B) substituendus pendeat a valore, quem obtinet x in æquatione (A); atque valor ejusdem x in hac æquatione major esse non possit quam $2\sqrt{p:3}$, neque ipsi æqualis; quantitas vero x realis esse nequeat, nisi sit x major quam $2\sqrt{p:3}$, vel ipsi æqualis, perspicuum est, quantitatem x in æquatione (B) formam induturam imaginariam, ubi eidem valor imaginariis involutus tribuatur.

SCHOLION

§. XVII.

Quæ breviter attulimus, undenam imaginariorum implicatio illa in Binomio Cardani oriatur, satis dilucide patefacere videntur. Indolem igitur ipsius Binomii penitius aliquanto scrutari, atque evoluere operæ pretium judicamus. Et primo quidem investigandum est an ita ejusdem termini sint comparati, ut reapse, virtualiter saltem, contrarietate signorum se mutuo destruant imaginaria.

PROP. VII.

§. XVII.

Formulæ Cardanicæ in caſu irreductibili tertii gradus

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

naturam explorare.

Ponatur $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)} = R + \sqrt{-S}$.

Quare ad tertiam Poteſtatem elatis quantitatibus, prodibit

$$\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)} = R^3 + 3R^2\sqrt{-S} - 3RS - S\sqrt{-S}.$$

Hoc poſito, binæ fingantur Relationis æquationes inter R, S, p, q hujuſmodi

$$R^3 - 3RS = \frac{q}{2}$$

$$3R^2\sqrt{-S} - S\sqrt{-S} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$$

vel

$$R^3 - 3RS = \frac{q}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$3R^2S - S^3 = \sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)} \ldots\ldots (B)$$

Quocunque modo expungatur indeterminata S ex binis æquationibus (A), & (B), ut Relatio prodeat inter R, p, q, vel hæc elicitur æquatio

R⁹ –

$$R^9 - 18R^8 + 81R^7 - \frac{39}{2}R^6 + 18qR^5 - \frac{81q}{2}R^4$$
$$-\left(p^3 - \frac{15q^2}{2}\right)R^3 - \frac{9q^2}{2}R^2 - \frac{q^3}{8} = o \ldots\ldots (C)$$

methodo, quam Præſtant. *Eulerus* in Actis Acad. Scient. Berolin., ad an. 1764, exhibuit, vel hujuſmodi ſimplicior, ratione jam uſitata,

$$R^7 - \frac{9}{4}R^6 + \frac{9q+1}{8}R^5 - \frac{5q}{8}R^4 + \left(\frac{7q^2}{8}+\frac{9q}{8}-\frac{p^3}{8}\right)R^3$$
$$+\left(\frac{9q^2}{16}+\frac{q}{16}\right)R^2 + \frac{q^2}{16}R - \frac{q^3}{64} = o \ldots\ldots (D)$$

Ut igitur æquationes (A), & (B), ſimul locum habere poſſint, ea inter R, p, q Relatio eſſe debet, quæ exprimitur per æquationem (C) vel (D). Æquationibus autem (A), (B) locum habentibus, exiſtet pariter æquatio

$$\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)} = R^3 - 3R^2\sqrt{-S} - 3RS + S\sqrt{-S}$$

vel hæc

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)} = R - \sqrt{-S}$$

& proinde hæc æqualitas

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)} =$$
$$2R \ldots\ldots (E)$$

Cum autem æquatio (C) vel (D) ſit gradus imparis, unus certe dabitur factor realis formæ $R + \mu = o$, hoc eſt quantitas R uno ſaltem valore in p, & q donabitur prorſus reali. Ergo ſuffecto in

(E) ejusmodi valore, Binomium Cardanicum quantitati reali fiet æquale. Explorata est itaque natura formulæ Cardanicæ in casu irreductibili tertii gradus. Q. E. F.

SCHOLION.

§. XVIII.

Duo igitur confecimus. Implicationis primum imaginariorum originem veram cognovimus in Binomio Cardanico; idemque ita imaginariis quantitatibus involvi, afficique deduximus, ut reale penitus esse demonstretur, etiamsi sub forma appareat imaginaria. Cujusnam autem esse possit formæ reale id quidpiam Cardanica expressione contentum, obscurioris aliquanto indaginis esse videtur.

Primus, quod sciam, Cl. *Nicole* in Actis Acad. Scient. Parisiensis ad An. 1738, Binomium in Seriem evolutum infinitam exhibuit, e terminis realibus conflatam, imaginariis quibusque, contrarietate signorum, inter se invicem elisis. Rem profecto acu tetigisset vir doctissimus, si Seriei naturam ulterius discutiendo, vel actu, si possibile est, summam imaginariorum implicatione immunem invenisset, vel eandem saltem, forma finita tum reali, cum imaginariis absoluta, exprimi nequaquam posse, quod perinde est, demonstrasset. Propterea nodus etiamnum ex integro solvendus relinquitur. In id itaque vires intendendæ modo sunt, ut Seriei e Binomio eductæ indolem diligentius aliquanto pervestigemus.

PROP. VIII.

§. XIX.

Seriem in infinitum excurrentem ex aggregato

$$(A+\sqrt{B})^m+(A-\sqrt{B})^m$$

definire.

RESOLUTIO.

Binomium $A+\sqrt{B}$ ad Potestatem m evectum hanc præbet seriem

$$A^m+\frac{m}{1}A^{m-1}\sqrt{B}+\frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$
$$A^{m-3}\sqrt{B^3}+\&c.....$$

Binomio vero $A-\sqrt{B}$ ad eandem Potestatem elato, series prodit

$$A^m-\frac{m}{1}A^{m-1}\sqrt{B}+\frac{m(m-1)}{1.2}A^{m-2}B-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$
$$A^{m-3}\sqrt{B^3}+\&c$$

Quare seriebus binis in unam summam redactis, series

ſeries colligitur (Q), terminis in locis paribus conſtitutis, ob contrarietatem ſignorum, ſe mutuo deſtruentibus.

$$\frac{(A+\sqrt{B})^m+(A-\sqrt{B})^m}{2} =$$

$$A^m + \frac{m(m-1)}{1.\,2}A^{m-2}B + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3.\,4}A^{m-4}B^2$$

$+$ &c........ (Q). Q.E.I.

PROP. IX.

§. XX.

Formam ſeriei pro caſu irreductibili tertii gradus ex generali (Q) (§. præced.) derivare.

Reſumatur Formula Cardanica (C) (§. III.)

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

& quoniam $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}$,

erit $A = \frac{q}{2}$, $\sqrt{B} = \sqrt{(-1)}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}$, $m = 1:3$;

ideoque, ſubſtitutis hujuſmodi valoribus in ſerie præcedenti (Q), ſeries pro caſu irreductibili hanc habebit formam ex terminis realibus conflatam

$$2\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)}\ \left\{ 1 + \frac{1.\,2}{1.\,2}\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}}{3q}\right)^2 - \frac{1.\,2.\,5.\,8}{1.\,2.\,3.\,4}\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}}{3q}\right)^4 + \frac{1.\,2.\,5 \ldots\ 14}{1.\,2.\,3 \ldots\ 6}\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)}}{3q}\right)^6 - \&c. \ldots \right\}$$

.... (R). Q. E. F.

COROLL.

§. XXI.

Hinc, poſito $\frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)} = z$, ſeries (R) (§. præced.) hanc formam induit ſimpliciorem

$$2\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)}\left(1 + \frac{2z^2}{2} - \frac{2.\,5.\,8z^4}{2.\,3.\,4} + \frac{2.\,5 \ldots 14z^6}{2.\,3 \ldots 6} - \frac{2.\,5 \ldots 20z^8}{2.\,3 \ldots 8} + \&c.\right)$$

.... (S).

PROP. X.

§. XXII.

Series infinita, cujus est terminus in genere

$$\frac{12n+5}{18n^2+3n-1}$$

existente n indice terminorum numero quolibet integro affirmativo, terminis constat perpetuo decrescentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur $n+1$, loco n, ut terminus in genere ordinis $n+1$ prodeat hujusmodi

$$\frac{12n+17}{18n^2+39n+20}$$

Antecedens itaque quilibet erit ad proxime subsequentem terminum, ut

$$\frac{12n+5}{18n^2+3n-1} : \frac{12n+17}{18n^2+39n+20}$$

hoc est, ut

$$211n^3+558n^2+435n+100 : 211n^3+342n^2+39n-17$$

Verum, qualiscunque integer numerus sit n, antecedens rationis est manifesto consequente majus. Ergo series terminis constat perpetuo decrescentibus. Q. E. D.

COROLL.

COROLL.

§. XXIII.

Quare series, cujus foret Terminus in genere

$$1+\frac{12n+5}{18n^2+3n-1}, \quad \text{vel} \quad \frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$$

erit quoque decrescens; atque Terminus Seriei maximus erit manifesto primus in ordine, cujus scilicet index $n=1$.

PROP. XI.

§. XXIV.

Quotiscunque fuerit in æquatione Cubica $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{37q^2}{40}$, Series ex evolutione Binomii Cardanici orta terminis constat crescentibus in infinitum.

DEMONSTRATIO.

Reſumatur Series (S) (§. XXI.), a Secundo termino incipiendo,

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2\cdot5\cdot8z^4}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2\cdot5\ldots14z^6}{2\cdot3\ldots\ldots6}$$

$$- \frac{2\cdot5\ldots\ldots20z^8}{2\cdot3\ldots8} + \&\ \ldots\ldots\ldots\ (S)$$

& quoniam Terminus in genere Seriei conſtitui poteſt hujuſmodi

$$\frac{2\cdot5\cdot8\ \ldots\ldots\ (6n-4)\ z^{2n}}{2\ 3\ \ldots\ldots\ (2n)}$$

loco n ponatur $n+1$, ut termini prodeant Seriei proxime ſubſequentes terminos ordinis n, quorum proinde erit Terminus in genere

$$\frac{2\cdot5\cdot8\ldots\ldots\ (6n+2)\ z^{2n+2}}{2\cdot3\cdot4\ldots\ldots\ (2n+2)}$$

Quare, poſitis A termino antecedente ordinis n, S termino proxime ſubſequenti ordinis $n+1$, erit utique

$$A : S = \frac{2\cdot5\cdot8\ldots\ldots(6n-4)z^{2n}}{2\cdot3\cdot4\ldots\ldots(2n)} : \frac{2\cdot5\cdot8\ldots\ldots(6n+2)z^{2n+2}}{2\cdot3\cdot4\ldots\ldots(2n+2)}$$

hoc eſt, eliſo ubique communi multiplicatore, redactiſque quantitatibus,

$A : S = (2n+1)(2n+2) : (6n-1)(6n+2)z^2$

Quotieſcunque igitur fuerit $(6n-1)(6n+2)z^2$ majus quam $(2n+1)(2n+2)$, erit ſubſequens quivis terminus S ſuo proxime antecedente major, atque ideo termini Seriei continuo augebuntur. Eſt autem (§. XXI.)

$$z = \frac{2}{3q} \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$$

Ergo termini perpetuo creſcent, ſi fuerit

$$z^2 = \frac{4}{9q^2}\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right) > \frac{(2n+1)(2n+2)}{(6n-1)(6n+n)}$$

hoc eſt

$$\frac{p^3}{27} > \frac{9q^2}{4}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(6n-1)(6n+2)}\right) + \frac{q^2}{4}$$

$$\text{hoc eſt} > \frac{q^2}{4}\left(\frac{72n^2+60n+16}{36n^2+6n-2}\right)$$

vel etiam

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$$

Quare, poſito $n=1$, ut maximus prodeat Seriei terminus (§. XXIII.), cujus eſt terminus in genere

$$\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$$

Termini Seriei (S) erunt continuo crescentes, si fuerit $\frac{p^3}{27} > \frac{37q^2}{40}$. Q. E. D.

PROP. XII.

§. XXV.

Quotiescunque fuerit in Æquatione cubica $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$, vel ipsi æquale, series ex resolutione Binomii Cardanici evoluta terminis constat perpetuo decrescentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur enim, ut ante, A antecedens quilibet terminus, S proxime subsequens, erit quidem (§. XXIV.)

$$A : S = (2n+1)(2n+2) : (6n-1)(6n+2)z^2$$

Termini itaque in Serie decrescent, si fuerit (ibid.)

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$$

Cum

Cum autem sit $\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$ unitate majus, erit, quocunque casu,

$$\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right) > \frac{q^2}{2}$$

Ergo existente, ex hypothesi, $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}$, vel ipsi æquali, erit eo magis

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$$

ideoque termini Seriei continuo decrescent. Q. E. D.

SCHOLION.

§. XXVI.

Demonstratum est igitur seriem casus irreductibilis esse perpetuo divergentem, quotiescunque fuerit in Cubica Æqnatione $\frac{p^3}{27} > \frac{37q^2}{40}$; atque contra continuo fore decrescentem, si fuerit $\frac{p^3}{27} < \frac{20q^2}{40}$, vel ipsi æquale. Quid porro de serie pronuntiandum, si $\frac{p^3}{27}$ intra hos limites constituatur, ut sit majus quam $\frac{20q^2}{40}$, minus vero quam $\frac{37q^2}{40}$?

PROP.

PROP. XIII.

§. XXVII.

Si in Æquatione Cubica fuerit $\frac{p^3}{27}$ intra limites constitutum $\frac{20q^2}{40}$, atque $\frac{37q^2}{40}$, Series (S) (§. XXI.) terminis primo constabit decrescentibus; mutata postea lege fiet crescens, pergentque termini divergere in infinitum.

DEMONSTRATIO.

Terminus Generalis $\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}$ actu evolvatur, ponendo successive, loco n, naturales numeros 1, 2, 3 &c.
Prodibit Series hujusmodi

$$\frac{37}{20},\quad \frac{53}{37},\quad \frac{211}{170},\quad \frac{44}{37},\quad \&c.$$

cujus utique termini decrescunt (§. XXIII.), pergentque decrescere etiamsi multiplicentur per communem factorem $\frac{q^2}{2}$, quo series evadet

$$\frac{37q^2}{40},\quad \frac{57q^2}{74},\quad \frac{211q^2}{340},\quad \frac{44q^2}{74},\quad \&c. \ldots\ldots (M)$$

Certum

Certum itaque est Terminum quemcunque Seriei (M) majorem esse quam $\frac{20q^2}{40}$, minorem vero priori termino in ordine $\frac{37q^2}{40}$. Cum autem ponatur $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{20q^2}{40}$, minus quam $\frac{37q^2}{40}$, manifestum est, vel posito $\frac{p^3}{27}$ alicui horumce terminorum æquali, vel intra duos constituto, fore $\frac{p^3}{27}$ singulis terminis antecedentibus minus, singulis vero subsequentibus majus. Verum usque dum $\frac{p^3}{27}$ minus est quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+15n+4}{18n^2+3n-1}\right)$, termini Seriei (S) decrescere debent (§. XXV.), contra vero crescere, si fuerit $\frac{p^3}{27}$ eadem quantitate maius (§. XXIV.). Ergo existente n numero terminorum initialium, quorum quilibet major est quam $\frac{p^3}{27}$, Seriei (S) termini, usque ad terminum ordinis n inclusive, primo decrescent, deinde crescere incipient, pergentque divergere in infinitum. Q. E. D.

SCHO-

SCHOLION.

§. XXVIII.

Seriei casus irreductibilis (S) (§. XXI.) hucusque indolem ita evolvimus, ut, quando ex terminis perpetuo crescentibus, quandoque decrescentibus coalescat, tuto pronuntiare possimus. Ejusmodi itaque Serierum in infinitum continuitarum valores in genere, actu singulorum parium differentias sumendo, ulterius perpendi merentur. Sequentia hunc in finem præmittamus.

PROP. XIV.

§. XXIX.

Seriei, quæ in infinitum protensa summa prædita est finita, nullum accedit augmentum, etiamsi duplo, triplo, vel in genere *n*. plo longius continuetur.

Ponatur enim id, quod post infinitum Seriei superaddi censetur, nequaquam evanescere. Summa Seriei in infinitum continuatæ haud erit finita; quod est contra hypothesim. Ergo &c.

CO-

COROLL.

§. XXX.

Si igitur, quod ex continuatione Seriei ultra terminum infinitesimum oritur sit finitæ vel infinitæ magnitudinis, summa Seriei erit necessario infinita. Finita autem erit Seriei summa, si quod ex continuatione ultra infinitesimum terminum gignitur fuerit quantitatis prorsus evanescentis.

SCHOLION.

§. XXXI.

Cryterium ex hoc facillimo principio, idque usui accommodatum, colligitur, dignoscendi utrum series quæpiam proposita in infinitum continuata summa donetur finita vel infinita. Summus *Eulerus* demonstrationem inde derivavit progressionis harmonicæ

$$\frac{c}{a},\ \frac{c}{a+b},\ \frac{c}{a+2b}\ \&c.\ldots\ldots\ \frac{c}{a+(n-1)b}\ \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

ut ut termini seriei perpetuo decrescant, summam esse infinite magnam, tali pacto (Com. Acad. Imp. Petrop. ad An. 1734.).

e Esto

Esto Seriei(A) terminus infinitesimus $\frac{c}{a+(i-c)b}$, denotante i numerum infinitum. Continuari censeatur series ab termino $\frac{c}{a+(i-1)b}$ ad terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, cujus index ni. Terminorum adjectorum numerus erit $(n-1)i$. Est autem eorundem summa minor quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$, major vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$, hoc est minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$, major quam $\frac{(n-1)c}{nb}$, evanescente finita magnitudine a respectu i. Ergo summa horumce terminorum erit finita, ideoque summa seriei (A) in infinitum continuatæ, infinita (§. XXX.).

PROP. XV.

§. XXXII.

Quantitas finita unitate major ad Potentiam infinite magnam i evecta infinitam conficit magnitudinem ipso infinito i inassignabili infinitate majorem.

D E-

DEMONSTRATIO.

Sit A quantitas finita. Et quoniam est A major unitate, ponatur $A = 1 + \omega$. Elevetur quantitas $1 + \omega$ ad Potestatem i. Erit

$$(1+\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}\omega + \frac{i(i-1)}{1.2}\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\omega^3 + \&c.$$

Cum autem numeri finiti 1, 2, 3, &c. præ i evanescant, erit

$$A^i = (1+\omega)^i = i\omega + i^2 . \frac{\omega^2}{2} + i^3 . \frac{\omega^3}{6} + \&c. \ldots$$

Sed factum ex quantitate finita in quantitatem infinitam ordinis n, ejusdem est ipsius ordinis factoris infiniti. Ergo terminus quilibet infinitinomii $i^n . \frac{\omega^n}{1.2 \ldots n}$ erit infinitum ordinis n. Cum vero infinitum i sit terminorum hujusmodi aggregato inassignabili infinitate minus, erit A^i inassignabili infinitate majus ipso infinito i. Q. E. D.

COROLL.

§. XXXIII.

Facile hinc statui potest eandem Potestatem A^i majorem quoque futuram, infinitate prorsus

 ina-

inassignabili, quam i^m, dum exponens m in finitis consistat quantitatibus. Plura præterea tum ad logarithmos spectantia infinitorum diversi ordinis cum numeris infinitis comparandos, cum ad alia in Theoria infinitorum, & infinitesimorum explananda derivari possent: sed alterius hæc esse loci, atque occasionis videntur.

PROP. XVI.

§. XXXIV.

Seriei

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8.....14z^6}{2.3.....6} + \frac{2.5.8.....26z^{10}}{2.3.....10} \ldots\ldots \ldots\ldots,$$

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots\ldots(4n-2)} \ldots\ldots (\Delta)$$

terminum infinitesimum definire.

RESOLUTIO.

Seriei (Δ) tribuatur forma (μ)

$$\frac{(12n-10)}{(4n-2)} + \frac{(12n-22)(12n-19)(12n-16)}{(4n-6)\ (4n-5)\ (4n-4)}$$

$$\frac{(12n-13)(12n-10)z^{4n-2}}{(4n-3)\ (4n-2)} + \&c.\ldots\ldots (\mu)$$

in qua

in qua si ponatur in primo termino $n=1$, in secundo $n=2$, in tertio $n=3$, & ita porro, prodibit primus terminus Seriei (Δ), secundus, tertius, & ita porro; Eritque hujusce formæ Terminus in genere ordinis n, qui sequitur

$$\frac{\ldots\&c.(12n-31)(12n-28)(12n-25)(12n-22)}{\ldots\&c.\ (4n-9)\ (4n-8)\ (4n-7)\ (4n-6)}$$

$$\frac{(12n-19)(12n-16)(12n-13)(12n-10)z^{4n-2}}{(4n-5)\ (4n-4)\ (4n-3)\ (4n-2)}$$

In quo facile videre est numerum factorum cujusque termini ordinis n fore $4n-3$. Quare in termino infinitesimo, existente indice n quantitate infinita $= i$, numerus quoque factorum hujus termini erit $4i-3$. Cum autem præ i quantitate infinite magna evanescant quantitates finitæ, quæ in quolibet insunt factore numeratoris, & denominatoris Termini infinitesimi, numerator erit manifesto $(12n)^{4n-3}\ z^{4n-2}$, hoc est $(12i)^{4i-3}$ z^{4i-2}, denominator vero $(4i)^{4i-3}$. Ergo Terminus ipse infinitesimus Seriei (Δ) erit

$$\frac{12^{4i}\ z^{4i}}{12^3\ z^2} : \frac{4^{4i}}{4^3} = \frac{3^{4i}\ z^{4i}}{3^3\ z^2} = \frac{1}{27z^2}(3z)^{4i}.\ \text{Q.E.I.}$$

PROP.

PROP. XVII.

§. XXV.

Terminum in genere definire Seriei ex differentiis actu sumtis conflatæ terminorum ordinis n in infinitum Serierum

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5\ldots14z^6}{2.3\ldots6} + \frac{2.5\ldots26z^{10}}{2.3\ldots.10} + \& \ldots.(A)$$

$$\frac{2.5.8.z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.8\ldots.20x^8}{2.3\ldots8} + \frac{2.5.8\ldots.32z^{12}}{2.3\ldots..12}$$

$+$ &c. ..... (B)
ex quarum differentia Series (S) casus irreductibilis

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5\ldots.14z^6}{2.3\ldots.6} - \frac{2.5\ldots.20z^8}{2.3\ldots.8}$$

$+$&c...... (S) coalescit.

RESOLUTIO.

Cum Seriei (A) sit terminus in genere

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots..(4n-2)}$$

Seriei vero (B)

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-4)z^{4n}}{2.3.4\ldots.(4n)}$$

dicatur P terminus ordinis n Seriei (A), Q terminus ejusdem ordinis Seriei (B). Certum est fore

$$P:Q = \frac{2.5.8\ldots..(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots.(4n-2)} : \frac{2.5.8\ldots..(12n-4)z^{4n}}{2.3.4\ldots.(4n)}$$

Ergo, eliso communi factore, redactisque quantitatibus, erit

$$P:Q = (4n-1)4n : (12n-7)(12n-4)z^2$$

Hinc dividendo

$$P-Q:P = ((4n-1)4n-(12n-7)(12n-4)z^2):(4n-1)4n$$

quare

$$P-Q = P\left(\frac{4n(4n-1)-(12n-7)(12n-4)z^2}{(4n-1)4n}\right)\ldots$$

..... (C)

Et terminus in genere propositæ seriei erit manifesto

$$\frac{2.5.8\ldots\ldots(12n-10)z^{4n-2}}{2.3.4\ldots\ldots(4n-2)}\left(\frac{4n(5n-1)-(12n-7)(12n-4)z^2}{(4n-1)4n}\right)$$

.....(D). Q. E. I.

COROLL. I.

§. XXXVI.

Dato itaque ejusmodi seriei termino generali (D), facile est ejusdem terminum infinitesimum definire. Nam existente infinitesimo P seriei (A) (§. XXXIV.) $= \frac{1}{27z^2}(3z)^{4i}$, si in multiplicatore ejusdem P in Æquatione (C) (§. præced.) fiat ubique n infinita $= i$, evadit ille $= 1 - 9z^2$. Ergo terminus infinitesimus seriei $P - Q$ fit

$$\frac{1-9z^2}{27z^2}(3z)^{4i} \text{ .... (E)}$$

COROLL. II.

§. XXXVII.

Quapropter, prout fuerit $3z$ majus, vel minus unitate, terminus (E) infinitesimus seriei, cujus est generalis terminus (D), erit infinitæ vel infinite parvæ magnitudinis.

PROP.

PROP. XVIII.

§. XXXVIII.

Seriei, cujus est (D) Terminus ordinis n, in infinitum continuatæ summa est finita quotiescunque fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$.

DEMONSTRATIO.

Cum sit $z = \frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$ (§. XXI.), atque ex hypothesi $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{2}$, erit $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)} = 3z$ minus unitate, & proinde Terminus Seriei Infinitesimus infinite parvæ magnitudinis. Fiat itaque $3^4\, z^4 = \frac{1}{1+\omega}$, ut sit $(3z)^{4i} = \frac{1}{(1+\omega)^i} =$

$$\frac{1}{i\omega + i^2 . \frac{\omega^2}{2} + i^3 . \frac{\omega^3}{6} \;\&c. \ldots\ldots}$$

(§. XXXII.); Atque series proposita, facto $\frac{1-9z^2}{27z^2} = R$, continuari censeatur ab termino infinitesimo ad terminum indicis $n\,i$. Terminorum

f adie-

adiectorum numerus erit $(n-1)i$. Cum autem Series decreſcat (§. XXV.), erit Terminorum adiectorum ſumma minor quam fractio

$$\frac{(n-1)iR}{i\omega + i^2 . \frac{\omega^2}{2} + i^3 . \frac{\omega^3}{6} + \&c. \ldots}$$

hoc eſt minor quam fractio

$$\frac{(n-1)R}{\omega + i . \frac{\omega^2}{2} + i^2 . \frac{\omega^3}{6} + i^3 . \frac{\omega^4}{24} + \&c. \ldots} \quad \ldots\ldots (\xi)$$

Eſt autem (ξ) quantitas inaſſignabili infinitate infinite parvæ magnitudinis ; & eſt terminorum poſt infiniteſimum adiectorum ſumma hac ipſa quantitate minor. Ergo ex eo , quod Seriei propoſitæ in infinitum continuatæ addi intelligitur , nullum Seriei valori accedit augmentum . Eſt igitur ſeries propoſita ſumma prædita finita (§. XXX.). Q. E. D.

P R O P. XIX.

§. XXXIX.

Seriei ejuſdem ſumma , quotieſcunque fuerit $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{2}$, eſt ordinis elatiſſimi infinite magna.

DE-

DEMONSTRATIO.

Poſito enim $p^3 : 27 > q^2 : 2$, fit $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$, hoc eſt $3z$, majus unitate, & proinde terminus Seriei infiniteſimus ordinis elatiſſimi infinite magnus. Cumque Seriei ejuſdem termini continuo creſcant (§. XXIV.), eodem, quo ante, modo demonſtrabitur, terminorum , qui poſt infiniteſimum addi cenſentur, ſummam fore infinitam, ideoque Seriei ſummam valoris eſſe infinite magni ordinis elatiſſimi. Ergo &c. Q. E. D.

C O R O L L.

§. XL.

Series igitur caſus irreductibilis Tertii gradus tum tantum eſt decreſcens (§. XXV.), atque valoris finiti (§. XXXVIII.), cum in Æquatione Cubica fuerit $\frac{p^3}{27}$ intra limites conſtitutum $q^2:4$, atque $q^2:2$. Quotieſcunque vero fuerit $p^3:27$ majus quam $q^2:2$, ſeries ex evolutione Binomii Cardanici genita vel terminis conſtat perpetuo creſcentibus , vel ſaltem in terminos deſinit creſcentes in infini-

 tum ,

tum, initialibus tantum aliquot prædita decrescentibus, differentiis etiam singulorum parium actu sumtis. Quo plane ostenditur, etiamsi series terminis donetur alternatim positivis & negativis, differentiam tamen serierum in infinitum continuatarum haud esse finitam, veluti non raro in ejusmodi seriebus volutandis contingere novimus.

SCHOLION.

§. XLI.

Nodum hic rursus solutu difficilem obiici, me non monente, apparet. Binomium siquidem Cardani in genere quidpiam esse necessario reale, non quidem meris freti suspicionibus, vel virtuali pensatione, sed certioribus Cartesianæ Algebræ principiis, regulisque innixi, demonstravimus luculenter (§. XVII.). Verum Binomio in seriem converso, quædam fit veluti quantitatum disgregatio, qua casuum irreductibilium Classis veluti quædam ab aliis quodammodo dissociatur. Dum enim certis tantum casibus series quantitatum respondet continuo decrescentium, atque summa prædita finita, cæteris omnibus series prodit ex terminis continuo crescentibus conflata, atque summa prædita valoris infinite magni. Undenam implicatio hæc, ut quantitati finitæ,

finitæ, quantitas respondeat per resolutionem rite evoluta valoris infinite magni?

In seriebus profecto a fractionum rationalium resolutione genitis, plura ejusmodi jamdiu considerata sunt, quæ primo intuitu a veritate quam maxime abhorrere videntur. Verum difficultatum solutiones, ibi a neglectis divisionis residuis repetendæ, ægre admodum hic ad Potentiarum evolutiones applicari patiuntur. Animo itaque in mysterii enodationem totus insistens, de integro serierum tam a Fractionibus, quam a Potestatibus Polinomiorum evolutarum genesim pervolvendam, scrutandamque suscepi. Multa quæ exinde in Theoria Serierum universa promere datum fuit, consilii procul dubio rationem commendabunt quam maxime. Quo rem perducere licuerit, quæ sequuntur, patefacient.

SECTIO II.

§. XLII.

SEriecum divergentium Theoria, quarum ſcilicet termini continuo creſcunt, ſive ex fractionum reſolutione, ſive ex Polinomiorum Poteſtatibus indicis fracti evolvantur, duabus præcipue graviſſimis difficultatibus afficitur; quarum una in eo eſt, ut enodetur, quo pacto, quave penſatione fieri poſſit, ut dum ex una Æquationis parte quantitas evoluta ſemper eadem manet, alterum Æquationis membrum perpetuo creſcat a valore propoſito magis, magiſque recedendo, & fiat tandem magnitudinis prorſus infinitæ. Alterum vero difficultatis caput potiſſimum eſt, ut, ſoluto etiam priori nodo, ſtatuatur an rejici debeant nec ne ex Matheſi univerſa ſeries divergentes, vel an, iiſdem admiſſis, quantitas finita, quæ veluti ſumma ſeriei ex ipſa reſolutionis natura obiicitur, pro aggregato omnium terminorum actu collectorum ſumi

tuto

tuto poſſit, & verſa vice, incolumi æqualium quantitatum notione. Nemini profecto ignotum eſſe poteſt, in feriebus a reſolutione fractionum genitis, Reſidua diviſionis neceſſario conſiderari debere, quorum proinde habita ratione, præcipuas, quæ in ſeries divergentes paſſim congeruntur, difficultates enucleari, atque exſolvi poſſe, compertum eſt. Verumtamen, ne hujuſmodi quidem reſiduorum conſiderationis ope, ſecundæ nobis allatæ Quæſtioni ſatisfactum hactenus fuiſſe cognoſcent, quos Auctorum circa ſeries infinitas ſcripta perlegere non piguerit. Quo autem pacto in ſeriebus ab evolutis Poteſtatibus ortis, reſiduorum tum præſidio locum nequaquam habente, nodi extricari poſſint, etiamſi multa ſolutu æque difficilia occurrant, qui explicuerit, me prorſus latet. Incomparabili *Eulero* circa ſeries a fractionibus oriundas verſanti eædem ipſæ difficultates ſe ſe conſiderandæ obtulerunt. Quæ ideo a tanti præſertim Viri ſagacitate proferuntur ex integro tranſcribenda, non abs re fore exiſtimamus (Vid. Inſtit. Calculi Different. Cap. III. pag. *95*, *96*, *97*.)

„ Ex his quidam concluſerunt hujuſmodi ſe„ ries, quæ vocantur divergentes, prorſus nullas „ habere ſummas fixas, propterea quod colligendis „ actu terminis ad nullum limitem fiat appropin„ quatio, qui pro ſumma ſeriei in infinitum con-

„ tinuatæ haberi poſſit: quæ ſententia cum iſtæ „ ſummæ jam ob neglecta ultima reſidua erroneæ „ ſint oſtenſæ, veritati maxime eſt conſentanea. „ Interim tamen contra eam ſummo jure obiici „ poteſt, has memoratas ſummas, quantumvis a „ veritate abhorrere videantur, tamen nuſquam in „ in errores inducere; quin potius, iis admiſſis, „ plurima præclara eſſe eruta, quibus, ſi iſtas ſum„ mationes prorſus rejicere vellemus, carendum „ eſſet. Neque vero hæ ſummæ, ſi eſſent falſæ, „ perpetuo ad veritatem nos ducere poſſent; quin „ potius cum non parum ſed infinite a veritate „ diſcrepent, nos quoque in infinitum a vero ſe„ ducere deberent. Quod tamen cum non eveniat, „ *difficillimus nobis reſtat nodus ſolvendus*.

„ Dico igitur in voce ſummæ latere totam „ difficultatem. Si enim ſumma ſeriei, ut vulgo „ uſus fert, ſumatur pro aggregato omnium ejus „ terminorum actu collectorum, tum dubium eſt „ nullum, quin earum tantum ſerierum in infini„ tum excurrentium ſummæ exhiberi queant, quæ „ ſint convergentes, atque continuo propius ad „ certum ſtatumque valorem deducant, quo plures „ termini actu colligantur. Series autem divergen„ tes, quarum termini non decreſcunt, ſive ſigna „ + & — alternentur, ſive ſecus, prorſus nullas „ habebunt ſummas fixas; ſiquidem vox ſummæ

„ hoc ſenſu pro aggregato omnium terminorum „ accipiatur. At vero in iis caſibus, quorum me„ minimus, quibus ex iſtiuſmodi ſummis erroneis, „ veritas tamen elicitur, id non fit, quatenus ex„ preſſio finita, verbi gratia $\frac{1}{1-x}$, eſt ſumma ſe„ riei $1+x+x^2+x^3+$ &c. ſed quatenus ea ex„ preſſio evoluta hanc Seriem præbet; ſicque in „ hoc negotio nomen ſummæ prorſus ommitti „ poſſet.

„ Hæc igitur incommoda, haſque apparentes „ contradictiones penitus evitabimus, ſi voci ſum„ mæ aliam notionem, atque vulgo fieri ſolet, tri„ buamus. Dicamus ergo Seriei cujuſque infinitæ „ ſummam eſſe expreſſionem finitam ex cujus evo„ lutione illa ſeries naſcatur. Hocque ſenſu Seriei „ infinitæ $1+x+x^2+x^3+$ &c. Summa revera „ erit $=\frac{1}{1-x}$, quia illa ſeries ex hujus fractionis „ evolutione oritur, quicunque numerus loco x „ ſubſtituatur. Hoc pacto, ſi ſeries fuerit conver„ gens, iſta nova vocis ſummæ definitio cum con„ ſueta congruet; & quia divergentes nullas habent „ ſummas proprie ſic dictas, hinc nullum incom„ modum ex nova hac appellatione orietur. Deni„ que ope hujus definitionis utilitatem ſerierum „ divergentium tueri, atque ab omnibus injuriis „ vindicare poterimus.

Hærere primo Vir ſapientiſſimus, aliquo modo, videtur circa ſeries divergentes, an ſcilicet admitti debeant nec ne. Cum vero eaſdem nuſquam in errorem induxiſſe conſideret, *nodum ſibi ſolvendum relinqui difficillimum*, ait. Id itaque conſilium ingreditur, ut, mutata ſummæ definitione, uſum atque utilitatem Serierum divergentium vindicare conetur. Rei difficultatem ipſa conſilii ratio comprobat manifeſto. Non omnis enim, tali pacto, dubitandi anſa ſublata eſt, nec omnino quæſtionibus ſatisfieri, facile perpendenti patet. Ponatur reapſe, quantitatem finitam, unde ſeries orta eſt, pro ſerie ipſa divergente, vel ſeriem, ejuſdem quantitatis finitæ loco, tuto ſumi poſſe. Etiamſi, definitionis vi, quantitatem tantum ſumtam eſſe intelligatur, loco Seriei, ex cujus evolutione ſeries nata eſt, vel ſeriem, loco ejuſdem quantitatis, utpote ex ipſius reſolutione genitam, actu tamen fit tacita ſuppoſitio, alteram alteri æqualem eſſe; alioquin ſubſtitutio fieri non poſſet, incolumi quantitatum altera alteri ſubrogandarum conditione. Quod profecto idem ipſe eſt quæſtionis cardo. Definitio itaque Præſtantiſſimi *Euleri* conſulte quidem invecta, atque retinenda videtur. Serierum tamen divergentium Theoriam aliquo ſecus tuendam eſſe, atque

atque ex aliis principiis ab injuriis vindicandam, fatendum eſt. Id igitur in primis curandum, ut Serierum infinitarum geneſim paulo accuratius evolvamus. Via fortaſſe aperietur, qua tum ad nodos recenſitos expediendos, cum ad indaginis noſtræ, circa caſum irreductibilem tertii gradus, myſteria ſin minus enodanda, intimius ſaltem noſcenda, facile perducamur.

PROP. XX.

§. XLIII.

Poſitis X, Y quantitatibus quibuſcunque, Seriei ex evolutione fractionis

$$\frac{1}{X-Y}$$

ortæ geneſin, atque indolem inveſtigare.

RESOLUTIO.

Reſolvatur per continuam diviſionem fractio, ut prodeat

$$\frac{1}{X-Y}=\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}+\frac{Y^2}{X^3}+\frac{Y^3}{X^4}+\&c.\ldots\ldots\frac{Y^{n-1}}{X^n}$$

exi-

exiſtente $\frac{Y^{n-1}}{X^n}$ termino ſeriei generali. Erit itaque Terminus quilibet ad proxime ſubſequentem, ut

$$\frac{Y^{n-1}}{X^n}:\frac{Y^n}{X^{n+1}}=\frac{1}{Y}:\frac{1}{X}=X:Y$$

Prout igitur in denominatore fractionis fuerit X majus vel minus quam Y, erunt in ſerie antecedentes termini proxime ſubſequentibus majores vel minores; Series ſcilicet terminis conſtabit decreſcentibus, vel creſcentibus in infinitum. Certum præterea eſt, vel ſeries continuo ad valorem $\frac{1}{X-Y}$ acccedat, vel ab eo recedat, idipſum, ſeriei compoſitione, reproduci debere, a quo ope reſolutionis ſeries orta eſt. Et quoniam nulla eſt ratio, qua diviſioni unus potius, quam alter limes neceſſario præſcribatur, tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, fractionem ipſam perpetuo Series reſtituere debet. Compoſitione itaque rite perhabita, ubicunque vel in terminis numero finitis vel infinitis conſiſtamus, ſerie vero poſita tam decreſcente quam creſcente quoquomodo, ratione ab ipſa Seriei geneſi petita, eandem ſemper reviviſcere quantitatem $\frac{1}{X-Y}$, demonſtrandum eſt. Aliquid igitur addi ſemper debere Seriei, quæ ad verum

verum valorem $\frac{1}{X-Y}$ accedit, pronum eſt colligere, idque eo minus, quo magis convergit Series; & contra aliquid detrahi, ſi divergat ſeries, idque eo majus, quo magis ipſa a vero valore recedit. Quapropter, reſolutione fractionis reſumta, diviſionem in terminis numero finitis gradatim abrumpamus. Hujuſmodi profecto prodibunt Æquationes

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X(X-Y)}$$

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^2(X-Y)}$$

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \frac{Y^3}{X^3(X-}$$

&c.........

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \&c. \ldots \frac{Y^{n-1}}{X^n} \ldots\ldots + \frac{Y^n}{X^n(X-Y)} \ldots\ldots (A)$$

exprimente indice n numero terminorum Reſiduo præcedentium. Horumce itaque terminorum inveniatur ſeorſim ſumma Generalis. Erit hæc per cognitas Serierum Geometricarum methodos, quæ ſequitur.

$$\frac{X^n - Y^n}{X^n(X-Y)}$$

Jam ex ipſa Seriei geneſi, atque ad ſummæ generalis naturam attendendo, manifeſtum eſt, vel termini numero n adſint in Æquatione (A), vel eorundem ſumma

$$\frac{X^n - Y^n}{X^n(X-Y)}$$

nullam Æquationi inferri mutationem. Suffecto igitur in Æquatione (A) terminorum congeriei Termino eodem ſummatorio, induet illa hanc formam

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{X^n - Y^n}{X^n(X-Y)} + \frac{Y^n}{X^n(X-Y)} \ldots\ldots (B)$$

id quod eandem prorſus reſtituit quantitatem $\frac{1}{X-Y}$. A finitis hinc ad infinita tranſeundo, ponatur in Æquatione (B) n numero infinito $= \infty$; Erit itidem

$$\frac{1}{X-Y} = \frac{X^\infty - Y^\infty}{X^\infty(X-Y)} + \frac{Y^\infty}{X^\infty(X-Y)} = \frac{1}{X-Y}$$

Ergo tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, compoſitione terminorum Seriei rite & ad reſolutionis normam perhabita, eadem ipſa reproducitur fractio

$$\frac{1}{X-Y}$$

ex cujus evolutione Series genita eſt, Serie poſita tam ad verum valorem continuo accedente, quam ab eodem continuo recedente. Indoles proinde Seriei a reſolutione Fractionis $\frac{1}{X-Y}$ ortæ explorata eſt.
Q.E.F.

PROP. XXI.

§. XLIV.

Naturam Seriei a reſolutione fractionis

$$\frac{1}{X+Y}$$

genitæ, poſitis, ut ante, X & Y quantitatibus quibuscunque, inveſtigare.

RESOLUTIO.

Loco Y in ſerie (A) Propoſ. præcedentis ponatur − Y. Prodibit Series (B)

$$\frac{1}{X+Y} = \frac{1}{X} - \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} - \&c.\ldots \frac{Y^{n-1}}{X^n} \ldots\ldots \pm \frac{Y^n}{X^n(X-Y)} \ldots (B)$$

reſiduo exiſtente poſitivo vel negativo, prout fuerit numerus terminorum n par vel impar. Summa autem Generalis terminorum reſiduo præcedentium erit

$$\frac{X^n \mp Y^n}{X^n(X+Y)}$$

ſigno ſuperiori vel inferiori locum habente, prout itidem fuerit numerus terminorum n par vel impar. Erit igitur, ut ante, in finitis

$$\frac{1}{X+Y} = \frac{X^n \mp Y^n}{X^n(X+Y)} \pm \frac{Y^n}{X^n(X+Y)} = \frac{1}{X+Y}$$

atque in infinitis

$$\frac{1}{X+Y} = \frac{X^\infty \mp Y^\infty}{X^\infty(X+Y)} \pm \frac{Y^\infty}{X^\infty(X+Y)} = \frac{1}{X+Y}$$

Ergo in finitis, atque in infinitis terminis, per compoſitionem terminorum, eadem ipſa reſtituitur fractio $\frac{1}{X+Y}$, ex qua Series orta eſt, tam in decreſcentibus, quam in continuo creſcentibus ſeriebus.
Q. E. Expl.

COROLL. I.

§. XLV.

Ad quantitates (C),

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^n \cdot \frac{1}{X \mp Y} \;\ldots\ldots\ldots (C)$$

quæ in compoſitionibus terminorum ſe mutuo deſtruunt, ſignorum contrarietate, attendendo, perſpicuum eſt, eo minores evadere, dum $\frac{Y}{X}$ ſit unitate minus, quo Series eo propius convergendo ad verum valorem accedit, & in infinitum abeunte ſerie, fieri tandem infinite parvas. Contra vero, exiſtente $\frac{Y}{X}$ unitate majori, eo majores fieri, quo magis ſeries a vero valore divergendo recedit, atque demum evadere valoris infinite magni.

COROLL. II.

§. XLVI.

Colligitur hinc quoque Auctores complurimos, & præſertim celeb. *Varignonium*, quæ reapſe in fractionum evolutionibus rite peractis irrepere non poſſunt, abſurda quædam veluti a Serierum divergentium indole profecta, ex incompleta tantum compoſitione deduxiſſe (Com. Acad. Scient. Pariſ. ad An. 1715.).

COROLL. III.

§. XLVII.

Patet itaque in finitis quantitatem $\frac{1}{X}$ æquari non poſſe $\frac{1}{X-Y}$ (§. XLIII.), niſi ei addatur $\frac{Y}{X(X-Y)}$; neque quantitatem $\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}$, niſi huic addatur $\frac{Y^2}{X^2(X-Y)}$; & in genere Seriem

$$\frac{1}{X} + \frac{Y}{X^2} + \frac{Y^2}{X^3} + \frac{Y^3}{X^4} + \&c\ldots\ldots\ldots$$

æquari non poſſe eidem quantitati $\frac{1}{X-Y}$, niſi ſeriei addatur quantitas

$$\frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

DEFINITIO.

§. XLVIII.

Dicantur ideo divisionis Residua in genere,

$$\frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

Complementa, utpote quibus Series compleri debentur, ut fractio resoluta rursus per compositionem reproducatur.

COROLL. IV.

§. XLIX.

Quod si Series

$$\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}+\frac{Y^2}{X^3}+\&c.\ldots\ldots\ (A)$$

ultra quoscunque limites continuari sine fine censeatur, etiamsi *Complementum* actu Seriei assignari non possit, quo fractio $\frac{1}{X-Y}$ explicite restituatur, ex ipsa tamen Seriei genesi consequitur, seriem (A) necessario complementum involvere virtualiter, atque implicite; alioquin compositio foret incompleta.

DE-

DEFINITIO II.

§. L.

Series igitur

$$\frac{1}{X}+\frac{Y}{X^2}+\frac{Y^2}{X^3}+\&c.\ldots\ldots\ldots\ \frac{Y^n}{X^n(X-Y)}$$

in terminis numero finitis, explicite completa nuncupari potest, utpote quæ complemento explicite assignabili prædita est, quo fractio, unde oritur, reproduci possit. In terminis vero infinitis, implicite completa nuncupetur. Cum enim complemento explicito & determinato careat, quippe quæ sine fine progreditur, & quantitatem tamen $\frac{1}{X-Y}$, a cujus evolutione generatur, ipsa quoque restituere debeat, pensatione implicita id fieri, intelligendum est, quantitatum infinite parvarum in seriebus convergentibus, atque infinitarum in divergentibus, se mutuo destruentium (§. XLV.).

CO-

COROLL. V.

§. LI.

Propterea eo ipſo, quod in terminis numero finitis, complementa explicite, actuque exhiberi queunt, ſeries tam convergentes quam divergentes, niſi ſine fine terminis excurrere cenſeantur, pro implicite completis haberi non poſſunt. Revera ſeries, cujus termini ſine fine continuari intelliguntur, pro unica, atque unico veluti complenda reſiduo, conſiderari neceſſario debet. Contra vero in terminis finitis, nulla eſt ratio, qua potius Series n terminorum, ut implicite completa ſumatur, quam $n+1$, vel in genere $n+m$. Quod totidem inter ſe diverſa implicare complementa, quorum ratio habenda foret, manifeſtum eſt.

COROLL. VI.

§. LII.

Series ideo tam convergentes, quam divergentes nil niſi quantitatem $\frac{1}{X \mp Y}$ actu exprimunt, ex cujus evolutione ortæ ſunt, hoc unico diſcrimine, quod in explicite completis, explicite quoque complementa aſſignentur: in ſeriebus vero ſine fine progredientibus, vel implicite completis, complementa quidem involvi, ſed potentialiter, cenſendum ſit.

SCHOLION I.

§. LIII.

Si quæ hucuſque attulimus vel levi attentione perpendantur, facile inferre licebit, ex impropria tantum, atque incompleta compoſitione, ſeries divergentes, modo veluti falſas, modo ad abſurda deducentes paſſim conſideratas fuiſſe. Quonam pacto, quove jure quantitatem finitam, a qua ſeries eſt educta, cum ſerie ipſa, naturali Complemento mutilata, comparare contendimus? neglectis ſiquidem in collectione partium, quæ ſeries implicite involvere, natura ipſa reſolutionis petente, neceſſario exiſtimandæ ſunt, quæque nullo modo negligi debent, neque quantitates, quæ in partes ſunt actu reſolutæ, reſtitui, neque abſurda evitari queunt. Series profecto divergens, prout objicitur, ex terminis continuo creſcentibus coaleſcens, nulla Complementi neceſſario conſiderandi habita ratione, cum ipſa quantitate a qua per evolutionem gigni-

gignitur, ne comparari quidem rite poteſt, nedum ipſi æquari. Hinc primæ difficultatis initio prolatæ (§. XLII.) plenariam ſolutionem colligi, ſerieſque divergentes ab injuriis vindicari, nemo eſt, qui per ſe ſe non cognoſcat. Sed & alteri quoque uberrime ſatisfieri poſſe, dilucide apparet. Cum enim ejuſmodi ſeries, nil aliud revera exprimant, quam eandem quantitatem a qua per reſolutionem ſunt enatæ, æque ac ipſæ convergentes ſeries, implicite ſua quæque inſeparabilia *Complementa* complectentes, longe abeſt, ut ex Matheſi rejici debeant, niſi eodem jure & convergentes rejiciantur. Tuto proinde concludendum eſt, finitam quantitatem unde oriuntur, pro ipſa ſerie, & verſa vice, ſumi poſſe, incolumi æqualium quantitatum notione, dum in terminis numero finitis nequaquam conſiſtamus, ſed integra utamur ſerie in infinitum progrediente. Neque alio modo ſeries ipſas convergentes, quantitatum finitarum loco, e quarum evolutione genitæ ſunt, uſurpare licet. Quotieſcunque enim termini numero finiti pro ipſa ſerie ſumuntur, vis revera rigori mathematico infertur, & vero proxima pro veris ſubrogantur, praxeos tantum facilitatis gratia.

SCHO-

SCHOLION II.

§. LIV.

Hiſce poſitis ab ipſa ſerierum natura ultro veluti profectis, nullos inde neque in comparationibus, neque in ſubſtitutionibus errores irrepere potuiſſe, mihi videtur. Si enim tum cautio, qua divergentes ſeries ab Analyſtis paſſim in Problematum ſolutionibus tractantur, cum quantitatis, unde ſeriem per evolutionem oriri ponitur, loco ſeriei ſubſtituendæ, ratio perpendatur, facile dignoſcemus, eaſdem ipſas, quæ inſtituuntur, operationes per ſe Complementi conſiderationem virtualiter complecti. Reapſe ſi ad ſeriem aliquam deducat Problema, nemo ſane inter Analyſtas eſt, qui initialibus ſtatim aliquot terminis collectis, eorundem ſummam, ſeriei loco, uſurpare audeat, niſi ſeriem eſſe prorſus convergentem certior factus ſit. Quod ſi ſeriei termini ſint divergentes, vel rurſus volutatis rite quantitatibus, ſeriem convergentem eruere conatur, vel ſaltem ſeriem ipſam integram, atque in infinitum, prout prodiit, excurrentem, incolumi Seriei conditione, in uſum vertens, quantitatem, ſi qua eſt, a qua per evolutionem gigni poſſit, iiſdem in utroque Æquatio-

i nis

nis membro peractis operationibus, investigare contendit. Nonne tali pacto complementi ratio virtualiter habetur, serie integra adhibita suum ipsa complementum implicite involvente? Nonne operationes ipsæ in Æquatione institutæ, dum seriei Terminos afficiunt, potentialiter quoque implicita complementa affecisse, reputandæ sunt? Quis inde error promanare possit, equidem non video. Ponatur Æquatio

$$\frac{1+y}{1+y^2} = \frac{1}{5}x^{5:3} + \frac{1}{8}x^{8:3} + \frac{1}{11}x^{11:3} + \&c.........(A)$$

relationem exprimens indeterminatarum x, y Problematis alicujus solvendi, propositumque sit, ut eadem relatio per Æquationem finitam, si fieri potest, definiatur.

Certum quidem est, ex superioribus, seriem (A), dum sine fine progredi censeatur, fore necessario implicite completam: & proinde, si congruo modo elici possit functio in x finita, ex cujus evolutione series hæc ipsa possit restitui, eandem fore ipsi $\frac{1+y}{1+y^2}$ æqualem. Differentietur itaque Æquatio, ut prodeat

$$\frac{dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{3}x^{2:3}dx + \frac{1}{3}x^{5:3}dx + \frac{1}{3}x^{8:3}dx + \&c...$$

hoc

hoc est

$$\frac{3dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = x^{2:3}dx + x^{5:3}dx + x^{8:3}dx + \&c....$$

Quare, facta divisione Æquationis per $x^{2:3}dx$, exurget

$$\frac{3dy(1-2y-y^2)}{x^{2:3}dx(1+y^2)^2} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c.......(B)$$

Series itaque (B), ad quam pervenimus, sine fine progrediens, est ipsa quoque implicite completa. Ergo quantitas finita $\frac{1}{1-x}$, unde per evolutionem oriri seriem, notum est, tuto seriei loco subrogari potest (§. LIII.). Erit igitur manifesto

$$\frac{dy(1-2y-y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{x^{2:3}dx}{3(1-x)}$$

& integrando prodibit

$$\frac{1+y}{1+y^2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{x^{2:3}dx}{1-x}\right) + \text{Const. A}$$

Æquatio videlicet finita indeterminatarum relationem exprimens, quæ definienda proponebatur. Nullam hic procul dubio institutam esse operationem, facile apparet, quæ, serie (A) posita divergente, in errorem inducere possit. Cum enim

$\frac{1+y}{1+y^2}$, ex Problematis natura, Seriei (A) æquale esse debeat, atque y ponatur finita, Seriem tacite compleri, hoc est implicite completam haberi debere, ex præcedentibus est manifestum. Serie proinde (A), per legitimas Analyseos operationes in universam seriem institutas, in seriem (B) conversa, complementum simul in ipsam seriem (B) invectum fuisse, intelligi debet. Ergo series (B), velut implicite completa, quantitati $\frac{1}{1-x}$, unde per evolutionem oriri potest, tuto atque legitime æquata est. Hinc valor finitus rite inventus, Seriei (A) loco, subrogari potuit.

COROLL. VII.

§. LV.

Nodum ex inde Præstantiss. *Eulero* memoratum (§. XLII.) dissolvendi ratio patet apodictica. Facile enim, quemadmodum innuimus, ex eo colligi potest, Series divergentes nusquam in errorem induxisse, quod nemo in primis sit, qui, in ejusmodi seriebus tractandis, a terminis numero finitis, veluti in convergentibus fieri solet, loco seriei sumendis

mendis

mendis consulto non caveat. Integra autem series atque sine fine progrediens suum ipsa complementum implicite trahit, ita, ut operationes, quæ Æquationem Seriem complectentes volutando instituuntur, in complementis simul virtualiter fieri, judicandum sit. Valorem proinde finitum, unde series completa per evolutionem gignitur, pro serie ipsa usurpando, & versa vice, perinde est ac si idem eidem prorsus surrogetur.

SCHOLION III.

§. LVI.

Quæ hactenus circa series a fractionibus oriundas disseruimus, ad eas modo transferri debent, quæ a Potestatum indicis fracti evolutione generantur. Etiamsi residuo, ut in fractionibus, proprie careant, *complementis* tamen nequaquam carere videbimus. Alioquin, cum suis ipsæ quoque difficultatibus afficiantur (§. XLI.), quos in illis extricare conati sumus, nodi in hujusmodi seriebus penitus inextricabiles relinquerentur.

PROP.

PROP. XXII.

§. LVII.

Si Polinomium quodlibet ſub Binomii forma $X+Y$ redigatur, atque Binomium ad Poteſtatem indicis fracti $1:\Delta$ evehatur, exiſtente Δ numero quolibet integro unitate majori, quotieſcunque fuerit X majus quam Y, ſeries, quæ inde prodit, infinita terminis conſtat continuo decreſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Binomium $X+Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ elatum præbet ſeriem

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta} + \frac{Y}{1.\Delta X^{(\Delta-1):\Delta}}$$

$$- \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^{(2\Delta-1):\Delta}} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3 X^{(3\Delta-1):\Delta}}$$

$$- \&c.........$$

vel hanc

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\Big(1 + \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2}$$

$$+ \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3 X^3} - \&c....\Big) .... (A)$$

Seriei

Seriei, a ſecundo termino incipiendo, Terminus ordinis n erit hujuſmodi

$$\frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)(3\Delta-1) ...... \big((n-1)\Delta-1\big)z^n}{1.2.3.4 .... n}$$

poſito $Y : \Delta X = z$; atque proinde terminus ordinis $n+1$, qui ſequitur

$$\frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)(3\Delta-1) .... (n\Delta-1)z^{n+1}}{1.2.3.4.......... (n+1)}$$

Si igitur dicatur A terminus antecedens ordinis n, S ſubſequens ordinis $n+1$, erit manifeſto

$$A : S = \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)......\big((n-2)\Delta-1\big)z^n}{1.2.3.4.......n} : \frac{(4-1)(2\Delta-1) ...... (n\Delta-1)z^{n+1}}{1.2.3.4......(n+1)}$$

Hinc, eliſo communi multiplicatore,

$$A : S = n+1 : (n\Delta-1)z$$

Quare ſi fuerit $n+1$ majus quam $(n\Delta-1)z$, vel, exiſtente $z = Y : \Delta X$, $(n+1)\Delta X$ majus quam $(n\Delta-1)Y$,

hoc eſt

$$\frac{X}{Y} \text{ majus quam } \frac{n\Delta-1}{(n+1)\Delta}$$

qui-

quilibet antecedens terminus Seriei proxime ſubſequenti erit major. Eſt autem X majus unitate, ex hypotheſi, atque $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ perpetuo unitate minus. Ergo eo magis erit $\frac{X}{Y}$ majus quam $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$. Seriei ideo termini erunt continuo decreſcentes. Q. E. D.

PROP. XXIII.

§. LVIII.

Series infinita, cujus eſt Terminus in genere

$$\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$$

exiſtente n indice terminorum, Δ numero quolibet integro unitate majori, terminis conſtat continuo creſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Ponatur $n+1$ loco n, ut terminus prodeat in genere ordinis $n+1$, hujuſmodi

$$\frac{(n+1)\Delta - 1}{(n+2)\Delta}$$

Erit

Erit antecedens quilibet A ad proxime ſubſequentem S, ut

$$\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta} : \frac{(n+1)\Delta - 1}{(n+2)\Delta}$$

vel ut $\left((n^2+2n)\Delta^2 - (n+2)\Delta\right)$:

$$\left((n^2+2n+1)\Delta^2 - (n+1)\Delta\right).$$

Eſt autem $(n^2+2n)\Delta^2 - (n+2)\Delta < (n^2+2n+1)\Delta^2 - (n+1)\Delta$. Ergo ſeries, cujus eſt terminus in Genere $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ terminis conſtat continuo creſcentibus. Q. E. D.

COROLL.

§. LIX.

Quare minimus hujuſce Seriei terminus erit, primus in ordine, cujus ſcilicet index $n = 1$.

PROP. XIXV.

§. LX.

Iiſdem, quæ in Prop. XXII., poſitis, ſi fuerit X : Y minus quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ipſi æquale, termini Se-ni Seriei ab evolutione Poteſtatis $(X + Y)^{1:\Delta}$ genitæ continuo augebuntur.

DEMONSTRATIO.

Etenim, ut termini creſcant, eſſe debet (§. LVII.)

$$\frac{X}{Y} \text{ minus quam } \frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$$

Quare poſito $n = 1$, ut prodeat terminus $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ Seriei, cujus eſt Terminus in genere $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, Termini quidem Seriei erunt continuo creſcentes, ſi fuerit $\frac{X}{Y}$ minus quam quantitas $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ipſi æquale, utpote quæ eſt omnium $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$ minima (§. LIX.). Q. E. D.

PROP. XXV.

§. LXI.

Si fuerit X : Y intra limites conſtitutum unitatis, atque $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, minus ſcilicet unitate, majus vero quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, ſeries ex evolutione Poteſtatis $(X + Y)^{1:\Delta}$ orta terminis primo conſtabit decreſcentibus: mutata poſtea lege fiet creſcens, pergetque creſcere in infinitum.

DEMONSTRATIO.

A quantitate $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, veluti termino cujuſdam ſeriei generali, evolvatur ſeries

$$\frac{\Delta - 1}{2\Delta},\ \frac{2\Delta - 1}{3\Delta},\ \frac{3\Delta - 1}{4\Delta},\ \frac{4\Delta - 1}{5\Delta} \ \&c. \dots\dots (A)$$

ponendo ſucceſſive loco n numeros naturales 1, 2, 3, 4 &c.. Demonſtratum jam eſt Seriei (A) terminos eſſe continuo creſcentes, quicunque ſit integer numerus Δ (§. LVIII.), atque ideo primo in ordine $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ neceſſario majores (§. LIX.). Et eſt quoque quilibet terminus unitate manifeſto minor. Ergo ſi ponatur $\frac{X}{Y}$ alicui horumce terminorum æquale, vel intra duos conſtitutum, perſpicuum eſt, fore $\frac{X}{Y}$ ſingulis antecedentibus terminis majus, ſingulis vero ſubſequentibus minus. Prout

Prout autem eſt X : Y minus vel majus quam $\frac{n\Delta - 1}{(n+1)\Delta}$, termini Seriei ſunt creſcentes (§. LX.), vel decreſcentes (§. LVII.). Ergo exiſtente *n* numero terminorum initialium Seriei (A), quorum quilibet minor eſt quam X : Y, Seriei

$$\frac{Y}{1\Delta X} - \frac{(\Delta - 1)Y^2}{1.2\Delta^2 X^2} + \frac{(\Delta - 1)(2\Delta - 1)Y^3}{1.2.3.\Delta^3 X^3} - \&c.....$$

termini uſque ad terminum *n* incluſive erunt decreſcentes; deinde, exiſtente jam $\frac{X}{Y}$ ſingulis ſubſequentibus Seriei (A) minori, pergent termini continuo creſcere. Q. E. D.

C O R O L L.

§. LXII.

Series itaque ab evolutione quantitatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ prodeuntes, haud ſtatim ſunt divergentes, etiamſi X ſit minus quam Y, quemadmodum Auctores plerique ſtatuiſſe videntur, niſi ſimul ſit X : Y minus quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$. Series inſuper conſiderandæ ſunt mixtæ, quæ partim decreſcentibus, partim creſcentibus terminis componuntur; id quod monuiſſe ſufficiat.

S C H O L I O N.

§. LXIII.

Indole ſeriei ex evolutione Poteſtatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ derivatæ probe explorata, Quæſtiones initio recenſitæ hic quoque enodandæ obiiciuntur; quonam videlicet pacto, quave penſatione admitti debeant ſeries ex terminis in infinitum creſcentibus coaleſcentes, atque a quantitate finita reali emanatæ, dum Reſidua in fractionibus computanda locum hic proprie habere non poſſunt. Verum iiſdem, quibus in §. XLIII. & ſeq. uſi ſumus, principiis inſiſtendo, difficultates exſolvi poſſe videntur. Etenim certo certius eſt, vel ſeries continuo ad valorem $(X+Y)^{1:\Delta}$ convergendo accedat, vel ab eo divergendo recedat, evolutione ipſa Poteſtatis in ſeriem ita ferente, Seriei terminorum compoſitione idipſum reproduci debere, a quo ſeries orta eſt. Cum autem partium numero, in quas evoluta quantitas diſtribuitur, unus potius quam alter limes legitime præſcribi non poſſit, ejus naturæ eſſe debet partium compoſitio reſolutioni contraria, ut tam in terminis numero finitis, quam in infinitis, Poteſtas ipſa reſtitui queat, ſerie poſita tam decreſcente quam te quam creſcente vel mixta quoquomodo. Aliquid igitur, veluti in fractionum evolutione conſtituimus, addi ſemper debet Seriei, quæ ad verum valorem $(X+Y)^{1:\Delta}$ accedit, idque eo minus, quo magis convergit ſeries; & contra aliquid ſemper detrahi, ſi divergat ſeries, idque eo majus, quo magis a vero valore recedit. Hoc poſito, ſit ſeries à Poteſtate $(X+Y)^{1:\Delta}$ derivata, hujuſmodi in genere

$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + C + D + E + \&c.$$

Talis profecto eſſe debet partium compoſitio, ut ſit perpetuo

$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + \varphi$$
$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + \varphi'$$
$$(X+Y)^{1:\Delta} = A + B + C + \varphi''$$

&c vel

$$X+Y = A^{\Delta} + \xi$$
$$X+Y = (A+B)^{\Delta} + \xi'$$

&c. & ita porro in infinitum, ſerie poſita tam creſcente quam decreſcente, atque exiſtentibus ξ, ξ' &c. Seriei complementis, prout opus, poſitivis vel negativis. Cum vero comparationis omogenea quælibet nil niſi $X+Y$ efficere debeant, neceſſe eſt, ut complementa id prorſus polleant, ut ſit

$$X+Y = A^{\Delta} + X+Y - A^{\Delta}$$
$$X+Y = (A+B)^{\Delta} + X+Y - (A+B)^{\Delta}$$

&c.

&c. æque ac in fractionibus ſuperius evolutis inventum eſt (§. XLIII. XLIV.)

Complementa itaque in terminis numero finitis aſſignari actu, atque explicite poſſe, nemo eſt qui non cognoſcat. Ut, ſi fuerit in numeris, facilitatis gratia, $X = 12$, $Y = 5$, $\Delta = 4$, & proinde Series, quæ ſequitur, convergens

$$(12+5)^{1:4} = (12)^{1:4}\left(1 + \frac{5}{48} - \frac{3\cdot 5^2}{2(48)^2} + \frac{3\cdot 7\cdot 5^3}{2\cdot 3(48)^3} - \&c.\ldots\right)$$

invenietur $\xi = 5$, $\xi' = -\frac{1070705}{1329964}$ &c.

Simili modo, factis $X = 4$, $Y = 9$, $\Delta = 3$, ut ſit Series divergens hujuſmodi

$$(4+9)^{1:3} = (4)^{1:3}\left(1 + \frac{9}{12} - \frac{2\cdot 9^2}{2\cdot 3(12)^2} + \frac{2\cdot 5\cdot 9^3}{2\cdot 3\cdot 4(12)^3} - \&c.\ldots\right)$$

erunt complementa $\xi = 9$, $\xi' = -\frac{9}{4}$ &c.

& ita porro.

Verum ſi Series

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 + \frac{Y}{1\cdot\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1\cdot 2\Delta^2X^2} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1\cdot 2\cdot 3\,\Delta^3X^3} - \&c.\right)$$

conti-

continuari ſine fine cenſeatur, complementum, uti fit in finitis, aſſignari non poſſe, facile perſpicere eſt, eandemque fore, quemadmodum in ſeriebus e fractionibus conſtituimus, implicite completam, complemento virtualiter involuto. Series itaque ex evolutione Poteſtatum indicis fracti oriundæ, ſuis quæque complementis præditæ ſunt, atque iis quidem explicitis in terminis numero finitis, implicitis vero, ubi ſeries ſine fine progrediatur, atque pro unica, unicaque veluti complenda quantitate conſiderari debeat. Hinc, niſi in terminis numero finitis conſiſtamus, in errores, Series, quæ inde quoque proveniunt, divergentes inducere non poſſunt; integra enim ſeries in infinitum excurrens potentialiter compleri intelligitur; cumque eandem Poteſtatem reſtituere cenſeri debeat, unde orta eſt, vel loco Poteſtatis Seriem, vel Seriei loco Poteſtatem ipſam ſumere velis, tuto id fieri poſſe, incolumi æqualium notione, ex iis conſequitur, quæ ſuperius habita ſunt.

Hiſce poſitis, Theoriam Poteſtatum indicis fracti in Series evolutarum ulterius perſequamur, ut & difficultates in caſu *irreductibili Tertii gradus* §. XLI. recenſitas, ſi fieri poteſt, expediamus.

PROP.

PROP. XXVI.

§. LXIV.

Quodlibet Binomium reale formæ $X+Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ evectum, in duas ſeries evolvi poteſt, eadem manente Binomii quantitate, quarum altera eſt decreſcens, altera vero vel creſcens in infinitum, vel terminis partim decreſcentibus partim creſcentibus compoſita.

DEMONSTRATIO.

Poteſtas $(X+Y)^{1:\Delta}$ in ſeriem converſa, hanc præbet Æquationem

$$(X+Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1+\frac{Y}{1.\Delta X}-\frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2X^2}+\frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)Y^3}{1.2.3\Delta^3X^3}-\&c.\right)$$

.... (P)

Mutato autem membrorum Binomii ordine, ut Poteſtas ſit $(Y+X)^{1:\Delta}$, hæc prodit Æquatio

I (Y+

$$(Y+X)^{1:\Delta} = Y^{1:\Delta}\left(1 + \frac{X}{1.\Delta Y} - \frac{(\Delta-1)X^2}{1.2\Delta^2 Y^2} + \frac{(\Delta-1)(2\Delta-1)X^3}{1.2.3\Delta^3 Y^3} - \&c.\right)$$

.... (Q)

Ponatur itaque X majus esse quam Y. Series quidem (P) terminis constat continuo decrescentibus (§. LVII.) Verum tum in Potestate $(Y+X)^{1:\Delta}$ primum Binomii membrum Y erit altero X minus. Quare vel est simul $\frac{Y}{X}$ minus quam $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$, vel majus, vel ipsi æquale. Si fuerit $\frac{Y}{X}$ minus simul quam $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$ vel ipsi æquale, Seriei (Q) termini erunt continuo crescentes (§. LVIII.). Quod si fuerit $\frac{Y}{X}$ unitate quidem minus, simul vero $\frac{\Delta-1}{2\Delta}$ majus, Seriei (Q) termini ad certum usque limitem erunt decrescentes, deinde augeri pergent in infinitum (§. LIX.). Cum autem quantitas Binomii eadem maneat manifesto, patet propositum. Q. E. D.

COROLL.

§. LXV.

Id ipsum, inverso ordine, concludi poterit, si Y majus quam X in evolutione Potestatis $(X+Y)^{1:\Delta}$ constituatur.

Quod si utralibet quantitas X vel Y ponatur imaginaria, easdem pariter series prodituras, perspicuum est, alternis tamen terminis imaginarium involventes.

PROP. XXVII.

§. LXVI.

Binomium reale formæ $X-Y$ ad Potestatem $1:\Delta$ elatum, existente Δ numero integro impari, in duas series evolvi potest, eadem manente Binomii quantitate, decrescentem aliam, aliam vero vel crescentem vel ex terminis partim decrescentibus, partim crescentibus conflatam.

DEMONSTRATIO.

Si Poteſtas $(X-Y)^{1:\Delta}$ in ſeriem convertatur, ut prodeat

$$(X-Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 - \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2X^2} - \&c.....\right)$$

Atque, permutatis Binomii membris, in ſeriem evolvatur Potentia $(-Y+X)^{1:\Delta}$, vel $-(Y-X)^{1:\Delta}$, ut ſit

$$(-Y+X)^{1:\Delta} = Y^{1:\Delta}\left(-1 + \frac{X}{1.\Delta Y} + \frac{(\Delta-1)X^2}{1.2\Delta^2Y^2} + \&c...\right)$$

id ipſum demonſtrabitur, quod in Prop. præced. confectum eſt. Ergo &c.

Q. E. D.

PROP. XXVIII.

§. LXVII.

Binomium reale formæ $X-Y$ ad Poteſtatem $1:\Delta$ evectum, poſito Δ numero integro pari,

I. Si fuerit X majus quam Y in duas ſeries evol-

evolvitur, incolumi Binomii quantitate, quarum altera terminis conſtat decreſcentibus, altera vero vel eſt divergens vel mixta, imaginariis tamen utraque implicata.

II. Si fuerit vero X minus quam Y, quo quidem Poteſtas ſit imaginaria, in duas itidem ſeries evolvitur, quarum altera vel eſt divergens vel mixta, realibus utraque terminis compoſita, altera autem convergens eſt, cujus tamen termini imaginariis afficiuntur.

DEMONSTRATIO.

I. Exiſtente enim, ex hypotheſi, $X > Y$, ſeries, quæ ex evoluta Poteſtate gignitur

$$(X-Y)^{1:\Delta} = X^{1:\Delta}\left(1 - \frac{Y}{1.\Delta X} - \frac{(\Delta-1)Y^2}{1.2\Delta^2X^2} - \&c..\right)....(A')$$

terminis conſtat continuo decreſcentibus (§. LVII.). At permutatis membris, ſeries fit

$$(-Y+X)^{1:\Delta} = (-Y)^{1:\Delta}\left(1 - \frac{X}{1.\Delta Y} - \frac{(\Delta-1)X^2}{1.2.\Delta^2Y^2} - \&c....\right)$$
...... (B')

quæ, prout in §. LX. demonſtratum eſt, erit divergens, ſi, exiſtente $Y < X$, fuerit ſimul

Y

$\frac{Y}{X} < \frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, vel ex convergente & divergente composita, si $\frac{Y}{X}$ intra limites constituatur unitatis, atque $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ (§. LXI.). Termini autem Seriei per factorem imaginarium $(-Y)^{1:\Delta}$ multiplicantur, etiamsi Potestas sit utique realis. Id ex eo proficisci, evidens est, quod Potestas $(-Y+X)^{1:\Delta}$ idem sit ac $(-1)^{1:\Delta}(Y-X)^{1:\Delta}$, & perinde fuerit ac si quantitas imaginaria $(Y-X)^{1:\Delta}$ in seriem evoluta fuisset, atque Æquatio deinde multiplicata per factorem imaginarium $(-1)^{1:\Delta}$. Ergo &c.

II. Posito autem $X < Y$, binæ Series, ex Potestatis membrorum permutatione oriundæ, sunt quæ superius (A′) (B′). Verum vel est simul $\frac{X}{Y} < \frac{\Delta - 1}{2\Delta}$, aut ipsi æquale, vel majus est quam $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$. Si fuerit vel $\frac{\Delta - 1}{2\Delta}$ minus, aut ipsi æquale, Seriei (A′) termini continuo augebuntur (§. LX.), eruntque omnes reales. At in serie (B′), existente tum $Y < X$, termini erunt decrescentes (§. LVII.), imaginario tamen singuli involuti, veluti facile videre est. Ergo &c.

Q. E. D.

CO-

COROLL. I.

§. LXVIII.

Ex Prop. superioribus interim colligere licet, nullam irrationalem quantitatem finitam tum realem cum forma reali contentam, in seriem tantum divergentem evolvi. Perpetuo enim, permutatis membris, sua quamque convergente serie, qua exprimi potest, præditam esse, demonstratum est. Quod probe notandum videtur.

COROLL. II.

§. LXIX.

Id insuper inferri potest (§. LXVII.), non ideo quantitates forma imaginaria comprehensas, reales statim concludendas esse, quod in seriem infinitam terminorum realium evolvi possint, quandoquidem radices absolute imaginariæ serie aliqua vel divergente vel mixta exprimi possunt ex terminis omnibus realibus coalescente.

CO-

COROLL. III.

§. LXX.

Quod si componantur binæ Poteſtates, quarum utraque ſit realis, atque componantur itidem ſeries ex earundem evolutione prodeuntes, ſeries perpetuo quædam aſſignari poterit terminorum realium continuo decreſcentium, ſumma prædita finita, etiamſi ex variato quoquomodo membrorum Poteſtatis utriuſque ordine, incolumi quantitate, ſeries tum divergentes cum mixtæ actu evolvantur. Si autem Poteſtates componendæ imaginarias quantitates involverint, peculiari, ut ad caſum noſtrum propius accedamus, diſquiſitione perpendendæ ſunt.

PROP. XXIX.

§. LXXI.

Series infinita, cujus eſt terminus in genere

$$\frac{12n+11}{18n^2+45n+27}$$

exiſtente n indice terminorum numero quolibet inte-

integro affirmativo, terminis conſtat continuo decreſcentibus.

DEMONSTRATIO.

Loco n ponatur $n+1$ in generali termino, ut terminus in genere ordinis $n+1$ prodeat hujuſmodi

$$\frac{12n+23}{18n^2+81n+90}$$

Antecedens itaque quilibet erit ad proxime ſubſequentem terminum, ut

$$\frac{12n+11}{18n^2+45n+27} : \frac{12n+23}{18n^2+81n\pm90}$$

Eſt autem antecedens rationis manifeſto conſequente majus. Ergo ſeries terminis conſtat continuo decreſcentibus.
Q. E. D.

COROLL.

§. LXXII.

Quapropter Series, cujus foret terminus in
m gene-

genere $1 - \frac{12n+11}{18n^2+45n+27}$

vel $\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}$

erit creſcens; atque terminus ſeriei minimus erit procul dubio primus in ordine, cujus ſcilicet index $n = 1$.

PROP. XXX.

§. LXXIII.

Hiſce poſitis naturam ſerierum, quæ ex Binomio

$$\sqrt[3]{(X+Y)} + \sqrt[3]{(X-Y)},$$

in cujus membris quantitates inſunt imaginariæ, evolvuntur, explorare.

RESOLUTIO.

Ex Poteſtate $(X+Y)^{1:3}$ hæc deducitur ſeries

$$(X+Y)^{1:3} = X^{1:3}\left(1 + \frac{Y}{1.3X} - \frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2} + \frac{2.5Y^3}{1.2.3.3^3X^3} - \&c.\right)$$

.... (A)

mutato vero terminorum ordine, hæc prodit Æquatio

$$(Y+X)^{1:3} = Y^{1:3}\left(1 + \frac{X}{1.3Y} - \frac{2X^2}{1.2.3^2Y^2} + \frac{2.5X^3}{1.2.3.3^3Y^3} - \&c.\right)$$

.... (B)

ex Poteſtate autem $(X-Y)^{1:3}$ nanciſcimur

$$(X-Y)^{1:3} = X^{1:3}\left(1 - \frac{Y}{1.3X} - \frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2} - \&c.\right) \ldots\ldots\ldots (A')$$

&, permutatis membris, hanc

$$(-Y+X)^{1:3} = Y^{1:3}\left(-1 + \frac{X}{1.3Y} + \frac{2X^2}{1.2.3^2Y^2} + \&c.\right) \ldots (B')$$

Ergo compoſitis binis (A) (A′), hæc Æquatio prodit

$$(X+Y)^{1:3} + (X-Y)^{1:3} =$$

$$2X^{1:3}\left(1 - \frac{2Y^2}{1.2.3^2X^2} - \frac{2.5.8Y^4}{2.2.3.4.3^4X^4} - \frac{2.5.8\ldots.14Y^6}{1.2.3\ldots.6.3^6X^6} - \&c.\right)$$

..... (C)

Et compoſitis binis (B) (B′), exurgit

$$(Y+X)^{1:3} + (-Y+X)^{1:3} =$$

$$\frac{2X}{3Y^{2:3}}\left(1 + \frac{2.5X^2}{1.2.3.3^2Y^2} + \frac{2.5.8.11X^4}{1.2.3.4.5.3^4Y^4} + \&c.\ldots\right) \ldots\ldots\ldots (D)$$

Sit modo $X = \frac{q}{2}$, $Y = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$, atque $p^3 : 27$ majus quam $q^2 : 4$. Si fiat $z^2 = \frac{4}{9q^2}\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$, Æquatio (C) hanc acquirit formam

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} =$$

$$2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\left(1 + \frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5\ldots.14z^6}{2.3\ldots6} - \&c.\right) \ldots\ldots (E)$$

quæ cum illa congruit, quam in §. XXI. invenimus, terminis omnibus realibus composita. Iisdem vero positis valoribus X atque Y in Æquatione (D), factoque

$$z'^2 = q^2 : 36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$$

hujusmodi prodit Æquatio

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} + \frac{q}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} + \frac{q}{2}\right)} =$$

$$\frac{q}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}}\left(1 - \frac{2.5z'^2}{2.3} + \frac{2.5\ldots.11z'^4}{2.3\ldots.5} - \frac{2.5\ldots.17z'^6}{2.3\ldots.7} + \&c.\right)$$

$\ldots.$ (F)

Serie itidem ex terminis realibus coalescente. Seriei (E) jam explorata est indoles in Prop. XI. XII. XIII., constitutumque est terminos tum tantum fore

fore decrescentes cum fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{q^2}{2}$; Existente autem $\frac{p^3}{27}$ majori quam $\frac{q^2}{2}$, seriem vel esse prorsus divergentem, vel in terminos desinere continuo crescentes. Series itaque (F) discutienda modo est. Terminus in genere Seriei, a secundo incipiendo, invenitur hujusmodi

$$\frac{2.5.8\ldots.\ (6n-1)z'^{2n}}{2.3.4\ ..\ (2n+1)}$$

Quare ponatur $n+1$ loco n, ut termini S prodeant Seriei proxime subsequentes Terminos A ordinis n, quorum proinde erit Terminus in genere

$$\frac{2.5.8\ldots..(6n+5)z'^{2n+2}}{2.3.4\ldots..(2n+3)}$$

Erit itaque

$$A : S = \frac{2.5.8\ldots\ ..(6n-1)z'^{2n}}{2.3.4\ldots\ldots..(2n+1)} : \frac{2.5.8\ldots\ldots.(6n+5)z'^{2n+2}}{2.3.4\ldots\ ..(2n+3)}$$

Quare eliso communi multiplicatore, redactisque terminis, erit

$$A : S = (2n+2)(2n+3) : (6n+2)(6n+5)z'^2$$

Prout igitur fuerit

$(6n+2)(6n+5)z'^2$ majus vel minus quam $(2n+2)(2n+3)$

erit

erit quilibet ſubſequens terminus S ſuo proxime antecedente A major vel minor. Poſitum eſt autem

$$z^2 = q^2 : 36\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)$$

Ergo termini Seriei erunt creſcentes vel decreſcentes, prout fuerit

$$\frac{q^2}{36\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)} \text{ majus vel minus quam } \frac{(2n+2)(2n+3)}{(6n+2)(6n+5)}$$

videlicet prout fuerit

$$\frac{p^3}{27} \text{ minus vel majus quam } \frac{(6n+2)(6n+5)q^2}{36(2n+2)(2n+3)} + \frac{q^2}{4}$$

hoc eſt quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$

eſt autem $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$ minus quam $\frac{q^2}{2}$

Si igitur fuerit I.° $\frac{p^3}{27}$ majus quam $\frac{q^2}{2}$, eo magis erit $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$. Ergo, exiſtente $\frac{p^3}{27}$ majori quam $\frac{q^2}{2}$, eſt

$$z^2 = \frac{q^2}{36\left(\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}\right)} \text{ minus quam } \frac{(2n+2)(2n+3)}{(6n+2)(6n+5)}$$

ideo-

ideoque termini Seriei (F) ſunt decreſcentes.

II.° Si fuerit vero $\frac{p^3}{27}$ majus quidem quam $\frac{q^2}{4}$, minus vero quam $\frac{67q^2}{180}$, Series (F) terminis conſtat creſcentibus in infinitum.

Nam, ut termini creſcant, eſſe debet

$$\frac{p^3}{27} \text{ minus quam } \frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right).$$ Quare, poſito $n = 1$, ut minimus prodeat Seriei terminus, cujus eſt Terminus in genere (§. LXXII.)

$$\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}$$

Termini Seriei (F) erunt manifeſto creſcentes, ſi fuerit $\frac{p^3}{27}$ minus quam $\frac{67q^2}{180}$.

III.° Quod ſi $\frac{p^3}{27}$ intra limites conſtituatur $\frac{67q^2}{180}$, atque $\frac{90q^2}{180}$, ut ſit majus quam $\frac{67q^2}{180}$, minus vero quam $\frac{q^2}{2}$, Series (F) terminis primo conſtabit decreſcentibus; mutata poſtea lege fiet creſcens, pergentque termini divergere in infinitum.

Evoluto enim generali Termino

$$\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$$

ut prodeat

$$\frac{67q^2}{180},\ \frac{154q^2}{374},\ \frac{277q^2}{626}\ \&c.\ldots\ldots\ (M)$$

perſpicuum eſt quemcunque Seriei (M) terminum minorem fore $\frac{q^2}{2}$, majorem vero priori in ordine $\frac{67q^2}{180}$. Exiſtente igitur $\frac{p^3}{27}$ intra hos ipſos limites conſtituto, pronum inferre eſt, vel poſito $\frac{p^3}{27}$ alicui horumce terminorum æquali, vel intra duos quoſcunque, fore $\frac{p^3}{27}$ ſingulis antecedentibus majus, ſingulis vero ſubſequentibus minus. Uſque dum autem $\frac{p^3}{27}$ majus eſt quam $\frac{q^2}{2}\left(\frac{18n^2+33n+16}{18n^2+45n+27}\right)$, termini Seriei decreſcere debent ex I.ª Prop. parte; contra vero creſcere, ſi fuerit $\frac{p^3}{27}$ eadem quantitate minus, veluti in II.ª Prop. parte oſtenſum eſt. Ergo, exiſtente n numero terminorum initialium Seriei (M), quorum quilibet minor eſt quam $\frac{p^3}{27}$, Seriei (F) termini uſque ad terminum ordinis

n in-

n incluſive primo decreſcent, deinde creſcere incipient, pergentque divergere in infinitum. Explorata eſt itaque natura Serierum, quæ proponebantur. Q. E. F.

COROLL. I.

§. LXXIV.

Hinc primo colligimus Binomium quoque Cardanicum tam in Series divergentes, quam in convergentes evolvi, ſola membrorum permutatione, Serieſque, quæ (§. XXIV.-XXVI) continuo creſcentes, atque valoris infinite magni prodierant, fieri modo decreſcentes, eadem manente Binomii quantitate. Quæ igitur (§. LXVIII.) circa quantitates irrationales tum reales cum forma reali contentas deduximus, iis quoque conveniunt quæ, dum valore quidem præditæ ſunt reali, ſub forma apparent imaginaria.

n CO-

COROLL. II.

§. LXXV.

Cum igitur Series ab evolutione tum fractionum cum Poteſtatum indicis fracti oriundæ e divergentibus convergentes evadere poſſint, facta tantum in evolvendis quantitatibus membrorum permutatione, incolumi valore, id inferre licet, cryteria haud admodum erutu difficilia fore, dignoſcendi, ſi quando ad divergentes Series quæſtionibus deducamur, quibus tranſpoſitis in terminis Seriei quantitatibus, ut Series fiat convergens, idem maneat Seriei valor, quicunque tandem ille ſit. Etiamſi enim Seriei quoque convergentis lateret ſumma, terminos ſaltem aliquot in ſummam colligendos pro ſumma ipſa uſurpare liceret. Quod quidem cum maximæ eſſe poſſit in arduis quæſtionibus utilitatis, Geometris perpendi, atque excoli ſane meretur.

COROLL. III.

§. LXXVII.

Præterea, cum relatio Series inter infinitas tam convergentes quam divergentes, atque quantitates a quarum evolutione Series ortæ ſunt, per Theoriam ſuperius conſtitutam, perſpecta modo ſit, & ab omni incertitudine, dubitationibuſque vindicata, ratio patet nullis obnoxia difficultatibus nodum expediendi, quem (§. XLI.) memoravimus. Cum enim Series convergentes æque ac divergentes ab evolutione Fractionum vel Poteſtatum eductæ nil niſi quantitates ipſas evolutas exprimant, Complementorum perpetuo vel explicitorum vel implicitorum habita ratione, difficultates, quæ ex incompletis compoſitionibus deducebantur, prorſus evaneſcunt.

COROLL. IV.

§. LXXVII.

Cum porro quantitates imaginarias in Series convergentes terminorum realium nequaquam converti (§. LXVII), demonſtratum ſit, conſideratio Serierum convergentium terminis realibus compoſitarum, in quas Binomium Cardanicum reſolvi, compertum eſt, ejuſdem valoris realitatem denuo comprobare poteſt.

SCHOLION I.

§. LXXVIII.

Quæſtio igitur huc modo redit, ut inveſtigetur utrum in Binomio Cardanico reale id quidpiam, quod per Seriem realem convergentem exprimitur, forma quoque finita imaginariis immuni involvatur. Si quis lateat reapſe hujuſmodi valor in Cardanica expreſſione, certo certius eſt a Serie per evolutionem ejuſdem expreſſionis eruta, atque ab imaginariis actu liberata, repetendum eſſe.

Equidem hoc unum ex hac univerſa Theoria conclu-

concludi poſſe videtur, ut eadem Series nonniſi Binomium reſtituere debeat a quo novimus eſſe profectam. Verumtamen liceat in re perardua Binomii ipſius valorem quodammodo a forma diſtinguere ſub qua apparet.

Quid enim eſt, cur Series Binomium utique exprimens, unde eſt evoluta, formæ autem imaginariæ implicatione prorſus exemta, valorem finitum, ſi quem involvit Binomium, imaginariorum itidem implicatione immunem, exhibere non poſſit? Id proculdubio contemplati ſunt ii omnes, qui, poſtrema veluti anchora confiſi, a Summatione ejuſmodi Seriei *caſus irreductibilis* reſolutionem pendere, exiſtimarunt. *Alembertius*, vir incomparabilis, in ea quoque videtur eſſe ſententia, ut credat, ſi Series e Binomio elicita Summari poſſit, reale id Summa proditurum, quod Cardanica forma tegitur, atque continetur.

„ La difficultè eſt de Sommer cette ſerie; c'
„ eſt a quoi on n'a pu parvenir juſqu' a preſent................ Il faut pour trouver l'ex-
„ preſſion reelle de la Racine, ou Sommer la ſe-
„ rie ſuſdite, ou degager de quelqu' autre manie-
„ re l'expreſſion trouvèe de la forme imaginaire
„ qui la defigure pour ainſi dire. C'eſt a quoi on
„ travaille inutilement depuis deux cents ans.

(Enciclop. Cas irreductibile)

Sum-

Summa itaque Seriei *directe* eſt tentanda, nulla Binomii Cardanici habita conſideratione. Vel Series, prout ipſa eſt tum valoris cum formæ realis, ſumma itidem donabitur finita tum valoris cum formæ realis, vel immutatum penitus reſtituet Binomium Cardani. Horum quodcunque accidere ponatur, vel actu tandem definita erit quantitas realis, quæ forma illa imaginaria comprehenditur, vel *directe* tandem demonſtratum erit, nullam in Cardanico Binomio intimius, a ſemetipſo diverſam, involvi quantitatem finitam forma exutam imaginaria; quo quidem quæſtioni finem imponere licebit. Ad rem.

SCHOLION II.

§. LXXIX.

Quæcunque ex binis Seriebus (E) vel (F) (§. LXXIII.), quod perinde eſt, ſummanda ſeligatur, præmittenda ſunt quædam veluti lemmata, ut ſigna alternatim poſitiva & negativa commode vitare liceat. Sumamus itaque Seriem (E), cujus directe ſumma ſit inveſtiganda.

PROP. XXXI.

§. LXXX.

Seriei (E)

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8.z^4}{2.3.4} + \frac{2.5:8....14z^6}{2.3.....6} + \&c.....(E)$$

ſummam definire

eleventur Binomia $1+3z$, $1-3z$ ad Poteſtatem m. Erit

$$(1+3z)^m = 1 + \frac{m}{1}(3z) + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2 + \&c......$$

$$(1-2z)^m = 1 - \frac{m}{1}(3z) + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2 - \&c.$$

Quare Poteſtatibus Binomiorum, & ſeriebus æquivalentibus in ſummam redactis, hæc exurget Æquatio

$$\frac{(1+3z)^m + (1-3z)^m}{2} = 1 + \frac{m(m-1)}{1.2}(3z)^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(3z)^4 + \&c.$$

Fiat $m = \frac{1}{3}$; Prodibit

$$1 - \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{2} = \frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.....14z^6}{2.3.4...6} + \&c....$$

Series ſcilicet (E'), quæ ſummanda proponebatur. Q. E. I.

PROP. XXXII.

§. LXXXI.

Summam determinare Seriei (E) (§. LXXIII.) a ſecundo termino incipiendo

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5...14z^6}{2.3.....6} - \&........(E)$$

Ponatur Y ſumma ſeriei

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5...14z^6}{2.3....6} + \frac{2.5....26z^{10}}{2.3....10} + \&c. ....(E'')$$

Atque Series (E') (§. LXXX.)

$$\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....14z^6}{2.3....6} + \&c....... (E')$$

addatur Seriei (E)

Series prodibit manifeſto

$$2\left(\frac{2z^2}{2} + \frac{2.5..14z^6}{2.3..6} + \frac{2.5....26z^{10}}{2.3.....10} + \&c....\right)$$

duplum ſcilicet ſeriei (E''). Quare ſi a duplo ſeriei (E'') dematur ſeries (E'), erit quod ſupereſt ſumma ſeriei (E). Inventa eſt autem ſumma ſeriei (E') (§. præced.) =

$$1 - \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

Serieſque (E'') poſita eſt Y. Ergo ſumma propoſitæ ſeriei (E) æquabitur

$$2Y - 1 + \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} + \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

Q. E. I.

COROLL.

§. LXXXII.

Pendet itaque Seriei (E) valor a valore Y ſeriei (E'') ex terminis poſitivo ſigno affectis coaleſcentis.

P R O P. XXXIII.

§. LXXXIII.

Hisce positis valorem Y seriei (E'') investigare. Quoniam constitutum est

$$Y = \frac{2z^2}{2} + \frac{2.5..14z^6}{2.3...6} + \frac{2.5.....26z^{10}}{2.3....10} + \frac{2.5.....38z^{14}}{2.3....14} + \&c \ldots$$

multipliciter Æquatio per $\frac{1}{3} z^{-7:3} dz$, & sumantur Integralia, ut prodeat

$$\frac{1}{3}\int(Yz^{-7:3}dz) = \frac{z^{2:3}}{2} + \frac{2.5....11z^{14:3}}{2.3....6} + \frac{2.5....23z^{26:3}}{2.3...10} + \&c..$$

Rursus multiplicetur hæc Æquatio per $z^{4:3}$, sumtisque differentialibus, dividatur per dz; Erit

$$\frac{\delta. z^{4:3}\int(Yz^{-7:3}dz)}{3dz} = z + \frac{2.5..11z^5}{2.3....5} + \frac{2.5....23z^9}{2.3....9} + \&c \ldots..$$

Sumtis denuo Æquationis differentialibus, fiat divisio per dz, ut sit

$$\frac{1}{3dz}\ \delta.\left(\frac{\delta.\, z^{4:3}\int(Yz^{-7:3}dz)}{dz}\right) =$$

1 +

$$1 + \frac{2.5..11z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....23z^8}{2.3...8} + \frac{2.5.....35z^{12}}{2.3.....12} + \&c....$$

Multiplicetur demum Æquatio per $\frac{z^{-4:3}dz}{3}$, & sumantur Integralia. Facta deinde multiplicatione per $z^{1:3}$, prodibit

$$\frac{z^{1:3}}{9}\int\left(z^{-4:3}\delta.\left(\frac{\delta.\, z^{4:3}\delta.(Yz^{-7:3}dz)}{dz}\right)\right) =$$

$$\frac{z^{1:3}}{3^3}\int\left(z^{-4:3}\delta.(4z^{1:3}\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-1})\right) =$$

$$-1 + \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5....20z^8}{2.3....8} + \frac{2.5...32z^{12}}{2.3...12} + \&c.....(E''')$$

Perspicuum est autem binas series (E'''), (E'') simul sumtas æquari seriei (E'), demta unitate; Cumque seriei (E') definitus sit valor (§. LXXXI.), ponatur is = Z. Erit manifesto Æquatio

$$\frac{z^{1:3}}{3^3}\int\left(z^{-4:3}\delta.(4z^{1:3}\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-1})\right) + Y + 1 - Z = 0$$

Quare facta multiplicatione per $3^3 z^{-1:3}$, & peracta differentiatione, abit Æquatio in hanc

$$4z^{-4:3}dz\int(Yz^{-7:3}dz) + 3Yz^{-2}dz + 9z^{-1}dY + 3^3\ z\,dY$$
$$- 3^3 Ydz - 2^3 dz - 3^4\ z^{4:3}\ \delta.\ z^{-1:3} Z = 0$$

O 2 Et

Et facta iterum multiplicatione per $z^{2:3}$, atque differentiatione, poſita dz conſtanti, prodibit Æquatio differentio – differentialis in ordinem redacta hæc

$$(1+9z^2)ddY + 12zdYdz - 2Ydz^2 - 2dz^2$$
$$- 9z^{1:3} \ \&\ z^2 \ \&\ z^{-1:3}\ Z = 0$$

vel hæc, ſuffecto valore Z,

$$(1+9z^2)ddY + 12zdYdz - 2Ydz^2 - (1+3z)^{-5:3}$$
$$dz^2 - (1-3z)^{-5:} dz^2 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ (T)$$

in qua poſt integrationem ponendum eſt

$$z = \frac{2}{3q} \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$$

(§. XXI.)

Ad integrandam formulam (T), facile invenitur Æquationi ſatisfacere hanc

$$Y + \frac{(1+3z)^{1:3}}{4} + \frac{(1-3z)^{1:3}}{4} = 0$$

Ergo poſita $Y = y - \frac{(1+3z)^{1:3}}{4} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{4}$

in Formula (T), prodit hujuſmodi Æquatio

$$(1+9z^2)\ ddy + 12zdydz - 2ydz^2 = 0 \ \ldots\ldots\ (B)$$

quæ, facta de more $y = e^{\int t\,dz}$, vertitur in hanc, exiſtente e quantitate, cujus log. us hyperb. eſt unitas,

$(1 -$

$$(1+9z^2)\,dt + (1+9z^2)\,t^2dz + 12tzdz - 2dz = 0$$
$$\ldots\ldots\ (T')$$

Fiat modo $t = \frac{3z+\omega}{1+9z^2}$. Æquatio (T') hanc induit formam ſimpliciſſimam

$$\frac{dz}{1+9z^2} = - \frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

hoc eſt, facto $z = - \frac{u}{3}$, hanc

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{3d\omega}{1+\omega^2} \ \ldots\ldots\ldots\ (T'')$$

cujus eſt integrale completum

$$(1-Au)(3\omega - \omega^3) - (A+u)(1-3\omega^2) = 0$$

exiſtente A conſtanti arbitraria; ſive hujuſmodi, ſubſtituto in z valore u,

$$(1+3Az)(3\omega - \omega^3) - (A-3z)(1-3\omega^2) = 0 \ \ldots\ldots\ (V)$$

Sit jam Z' valor ipſius ω in z, & conſtantes ex relationis Æquatione (V) definiendus.

erit $t = \frac{3z+Z'}{1+9z^2}$; atque $y = e^{\int\left(\frac{3zdz + Z'dz}{1+9z^2}\right) + B}$

ideoque

$$Y = e^{\int\left(\frac{3zdz + Z'dz}{1+9z^2}\right) + B} - \frac{(1+3z)^{1:3}}{4} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{4}$$

Quod integrale erit completum Æquationis (T)

O 3 exi-

existentibus A, in ipsa expressione Z' contenta, atque B constantibus arbitrariis. Inventus proinde est valor Y Seriei (E'') quemadmodum proponebatur.

Q. E. I.

COROLL.

§. LXXXIV.

Cum autem sit Seriei

$$\frac{2z^2}{2} - \frac{2.5.8z^4}{2.3.4} + \frac{2.5.8\ldots\ldots14z^6}{2.3.4\ldots\ldots6} - \&c.\ldots\ldots (E)$$

valor (§. LXXXI.)

$$2Y - 1 + \frac{(1+3z)^{1:3}}{2} + \frac{(1-3z)^{1:3}}{2}$$

erit profecto, substituto valore Y, summa quaesita

$$2e^{\int\left(\frac{3z\,dz + Z'dz}{1+9z^2}\right) + B} - 1\ldots\ldots\ldots (\mu)$$

in qua post integrationem ponatur $z = \frac{2}{3q}\sqrt{\left(\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right)}$.

SCHOLION.

§. LXXXV.

Statim ac vel ad purum integrale Æquationis

$$\frac{du}{1+u^2} = \frac{3d\omega}{1+\omega^2}\ldots\ldots (T'')$$

attendamus, in seriei nostræ valorem (μ) rursus Cardanicam formam invehi debere, ex eo cognoscere licebit, quod manifesto agatur de invenienda tangente ω Arcus subtripli ejus, qui tangentem habet u in circulo, cujus est semidiameter unitas. Nam, existente u Arcus tangente, erit ejusdem Arcus Cosin. $= \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}$, atque Sin. $= \frac{u}{\sqrt{(1+u^2 1)}}$ ideoque Cosin. Anguli subtripli

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+u^2)}}\right)^{1:3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+u^2)}}\right)^{1:3} = \varphi$$

vel, cum sit $u = -3z$ (§. LXXXIII.),

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1-3z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+9z^2)}}\right)^{1:3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+3z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+9z^2)}}\right)^{1:3}$$

est autem $\frac{1}{\varphi}\sqrt{(1-\varphi^2)}$ ejusdem anguli subtripli Tangens.

gens. Ergo $\varpi = \frac{1}{\varphi}\sqrt{(1-\varphi^2)}$, & proinde Z manifesto in formam incidit Cardanicam imaginariis implicitam. Quare valor realis (μ) (§. præced.) seriei ex Binomio Cardanico eductæ, directe inventus, etiamsi series imaginariis sit penitus immunis, eadem ipsa, qua Cardanicum Binomium, imaginariorum implicatione afficietur, formamque rursus induet imaginariam. Formulam itaque (μ) ulterius evolvere, supervacaneum esse arbitror.

Cum aliquid de eadem Æquatione (T) (§. LXXXIII.) summo Geometræ *de la Grange* perscripsissem, in litteris ad me datis, pro ea qua in me est humanitate, respondit, se quoque ad Integrale completum devenisse hujus formæ

$$Y = A\left(1+3z\sqrt{-1}\right)^{1:3} + B\left(1-3z\sqrt{-1}\right)^{1:3} - \frac{(1+3z)^{1:3}}{4} - \frac{(1-3z)^{1:3}}{4}$$

existentibus A & B constantibus arbitrariis. Id ipsum invenit Cl. de *Malfatti* Analysta acutissimus, cui formulæ differentialis pariter copiam feceram, atque integrale Æquationis (B) (§. LXXXIII.) exhibuit imaginariis itidem involutum.

CO-

COROLL. I.

§. LXXXVI.

Hisce igitur hucusque constitutis, apodictice confectum est, Expressionem Cubicæ Æquationis, Cardanicam nuncupatam, nullam in se complecti quantitatem finitam imaginariorum implicatione immunem, & proinde tuto concludendum, Binomium Cardanicum, in casu vulgo irreductibili, *valoris esse necessario realis, formæ autem necessario imaginariæ.*

SCHOLION I.

§. LXXXVII.

Frustra itaque methodum investigari, qua, casu Æquationis tertii gradus vere irreductibili (§. I. II.), radix realis ab imaginariorum præsentia liberata algebraice exhiberi possit, pronum colligere est, id rei natura nequaquam ferente. Quid inde vero detrimenti Analyseos tum præstantiæ cum perfectioni derivetur, me certe latet, quasi radix minus algebraica, atque in Transcendentium censu haberi debeat, veluti quibusdam visum est,

quæ

quæ imaginariis quantitatibus implicatur, incolumi penitus radicis realitate.

SCHOLION II.

§. LXXXVIII.

Propterea longe abeſt, ut inter Cubicas reputanda ſit Æquatio, quam Clariſs. *Nicole* primum reſolvit, exhibuitque in Actis Ac. Scient. Pariſ. ad an. 1738, 1740, videlicet

$$x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{2p:3} = 0$$

perinde ac ſi a caſu irreductibili erepta foret (Enciclop. Caſ. irreductibie). Pari enim jure tum hæc infinities generalior

$$x^3 - px \pm \frac{p}{n}\left(\frac{n \mp 1}{n}\,p\right)^{1:2} = 0$$

cum aliæ bene multæ, quas reſolvimus, atque haud ita pridem Illuſtriſs. Societati Scient. Bononienſi obtulimus, ab irreductibilitatis caſu veluti exemptæ conſiderari deberent. Etiamſi Æquationes tertii gradus reſolubiles tum Præcl. *Nicole*, cum nobis inventæ radicibus revera præditæ ſint realibus, inæqualibus, atque incommenſurabilibus, attamen

tamen ad cubicas æquationes nequaquam pertinere, ex eo conjici poteſt, quod neque p & q ſint rationales (§. I.), neque diviſore careant irrationali (§. II.).

In hoc ferme numero æquationes omnes tertii gradus

$$x^3 - px + q = 0$$

in quibus $p^3:27$ eſt ad $q^2:4$ in duplicata ratione ſinus totius ad Co-ſinum Anguli $\frac{K.\,360^\circ}{2^n}$, ſive $\frac{K.\,360^\circ}{2^n.\,5}$, habendæ ſunt, quarum radices reales algebraice exprimi poſſe, demonſtravit Vir ſummus *Alembertius* (Vid. Com. Acad. Sc. Berolin. ad An. 1746.): Vel æquationes in genere, quæ ab Arcuum circularium triſectionibus diverſimode per geometricas conſtructiones derivari queunt, reſolubiles quidem, & radicibus tum realibus cum inæqualibus, atque incommenſurabilibus donatæ, in caſuum tamen vere irreductibilium cenſu nequaquam enumerandæ.

SCHO-

SCHOLION III.

§. LXXXIX.

Si quid novæ lucis in penitioribus tam Cubicarum æquationum, quam Serierum infinitarum myſteriis, noſtra hæc attuliſſe cognoverint Sapientiores, Operæ id nobis erit pretium, atque ornamentum.

FINIS.